Name:

Mat.Nr.: Studium:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2020S, VO, 2.5h, 4.0EC
25.Juni 2018
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem Ergebnis

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben ist ein MA(∞) Prozess
$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \epsilon_{t-j} \tag{1}$$
mit einem white noise Prozess $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ und Koeffizienten der Form
$$b_j = c_1 a_1^j + c_2 a_2^j \text{ für } j \geq 0 \tag{2}$$
wobei $c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $|a_1| < 1$ und $|a_2| <1$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten absolut summierbar sind, d.h. zeigen Sie
   $$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| < \infty. \tag{3}$$
   Bemerkung: Daher gilt natürlich auch $\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 < \infty$, der MA Prozess ist also wohldefiniert.

   (b) Berechnen Sie nun bitte die Autokovarianzfunktion des Prozesses $\gamma(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t) = \mathbf{E}(x_{t+k} x_t)$. Zeigen Sie auch insbesondere, dass die ACF die Form
   $$\gamma(k) = m_1 a_1^k + m_2 a_2^k \text{ für } k \geq 0$$
   mit geeigneten Koeffizienten $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ hat.

   (c) Wir betrachten nun die h-Schritt Prognosen $\hat{x}_{t+h}$ für x_{t+h} aus der unendlichen Vergangenheit $(x_s \,|\, s \leq t)$. Welche Bedingung muss gelten, damit diese h-Schrittprognosen gegeben sind durch:
   $$\hat{x}_{t+h} = \sum_{j \geq h} b_j \epsilon_{t+h-j}. \tag{4}$$
   Sie müssen diese Bedingung nur anführen, aber nicht beweisen.

   (d) Zeigen Sie nun, dass die h-Schrittprognosen (unter der im obigen Punkt angeführten Bedingung) die Form
   $$\hat{x}_{t+h} = z_1 a_1^h + z_2 a_2^h$$
   haben, wobei z_1, z_2 zwei Zufallsvariable sind. (Es gilt $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_\epsilon(t) = \overline{\mathrm{span}}\{\epsilon_s \,|\, s \leq t\}$.) Hinweis: Das klingt vielleicht schwierig, ist aber ganz einfach zu zeigen, wenn Sie die b_j' s aus Gleichung (2) in (4) einsetzen.

   (e) Erklären Sie die Begriffe ,,Innovationen“ und ,,regulärer stationärer Prozess“.

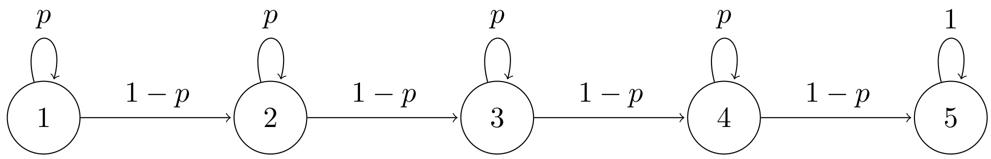
2. (a) Gegeben seieine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/2, 1/2)$ und Übergangsmatrix $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

   - $\mathbb{P}[X_4 = 2 | X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 2]$
   - $\mathbb{P}[X_4 = 2, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 2]$

   (b) (Fortsetzung) Berechnen Sie:

   - $\mathbb{P}[X_4 = 2, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 1]$
   - $\mathbb{P}[X_0 = 2 | X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 2]$

   (c) Gegeben sei eine Zahl $p \in (0, 1)$ und eine Markovkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Anfangsverteilung δ_1 und folgendem Übergangsgraph:[1]



   Sei $H = \inf\{n \geq 0 : Y_n = 5\}$. Berechnen Sie $E[H]$.

   (d) Gegeben sei eine Markovkette $(R_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, \ldots, 8\}$, Anfangsverteilung die diskrete Gleichverteilung auf I, und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.3 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie die Kommunikationsklassen an.

   Begründen Sie detailliert, dass die Zustände 2 und 8 kommunizieren, indem Sie entsprechende Verbindungen $i_1, \ldots, i_{n-1}$ mit $p_{2,i_1} \cdots p_{i_{n-1},8} > 0$ und umgekehrt angeben.

   (e) Mit einem Satz aus der Vorlesung können wir rasch und ohne längere Rechnung begründen, dass die Kommunikationsklassen der Kette aus der vorigen Aufgabe alle rekurrent sind. Wie lautet dieser Satz, was sind genau die Voraussetzungen?

[1]Diese Aufgabe ist von der UNIQA 4WARD Math Challenge#2 inspiriert. Die Aufgabe dort ist allerdings etwas schwieriger. `https://fam.tuwien.ac.at/lehre/news/`

3. Gegeben ist das AR(2) System:

$$x_t = \frac{1}{3}x_{t-1} + \frac{1}{3}x_{t-2} + \epsilon_t, \quad (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = \frac{4}{3})$$

(a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung.

(b) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t)$ des entsprechenden AR(2) Prozesses (x_t). Berechnen Sie mindestens $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, $\gamma(2)$ und $\gamma(3)$.

(c) Bestimmen Sie die Einschritt-Prognose $\hat{x}_{t+1}$ für x_{t+1} und die Zweischritt-Prognose $\hat{x}_{t+2}$ für x_{t+2} (aus der unendlichen Vergangenheit) und die entsprechenden Prognosefehler-Varianzen.

(d) Bestimmen Sie die Prognose $\hat{z}_{t+2} = c_0 + c_1 x_t + c_2 x_{t-1}$ für

$$z_{t+2} := 2 + x_{t+1} + x_{t+2}$$

(d.h. bestimmen Sie die entsprechenden Koeffizienten c_0, c_1, c_2) und die entsprechende Fehlervarianz. Geben Sie auch den Quotienten $\mathrm{Var}(z_{t+2} - \hat{z}_{t+2})/\mathrm{Var}(z_{t+2})$ an.

4. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Gegeben sei eine Konstante $a \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob der Prozess $(W(t) - at, t \geq 0)$ ein Martingal[2], ein Submartingal, ein Supermartingal oder nichts davon ist. Führen Sie eine vollständige Diskussion für alle $a \in \mathbb{R}$ durch!

   (b) Gegeben sei eine Konstante $b \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob der Prozess $(W(t)^2 + bt, t \geq 0)$ ein Martingal[2], ein Submartingal, ein Supermartingal oder nichts davon ist. Führen Sie eine vollständige Diskussion für alle $b \in \mathbb{R}$ durch!

   (c) Sei $Y(t) = \exp(1 + 2t + 3W(t))$ für $t \geq 0$. Dann ist Y ein Ito-Prozess und kann in der Form
$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s), \quad t \geq 0$$
dargestellt werden. Geben Sie $Y(0)$, $a(t)$ und $b(t)$ an. Die Voraussetzungen zur Anwendung der Ito-Formel müssen und sollen Sie hierbei nicht überprüfen!

   (d) Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ sei
$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} W(j) I_{[j,j+1)}(t), \quad t \geq 0.$$
Begründen Sie genau (Messbarkeit und Integrierbarkeit!), dass $f_n \in M^2_{\text{step}}$ und berechnen Sie $E[I(f_{101})^2]$ mit der Ito-Isometrie.

   (e) Ist f_n ein Gaußscher Prozess? Wenn ja, geben Sie die Mittelwertfunktion und die Kovarianzfunktion an, wenn nein, eine genaue Begründung, warum nicht.

[2] Ein Martingal ist automatisch immer auch ein Submartingal und ein Supermartingal, das müssen Sie in diesem Fall nicht extra dazuschreiben.