Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2019S, VO, 2.5h, 4.0EC
28.Februar 2020
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownschen Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Sei $0 < s < t < 1$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[W(s)^2 W(t)]$ und $\mathbb{E}[W(s)W(t)^2]$.

   (b) Sei $U(t) = t + W(t)$ für $t \geq 0$. Ist U ein Gaußscher Prozess? Wenn ja, geben Sie Mittelwertfunktion und Kovarianzfunktion an, eine Begründung ist nicht erforderlich. Wenn nein, begründen Sie warum nicht.

   (c) Ist U ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal oder gar kein Smartingal? Begründen Sie ihre Antwort genau.

   (d) Sei
   $$Y(t) = (W(t) - 1)^2, \qquad Z(t) = \int_0^t Y(s)dW(s), \qquad t \geq 0.$$
   Berechnen Sie $\mathrm{Var}[Z(1)]$.

   (e) Sei
   $$S(t) = \sin W(t), \qquad A(t) = \int_0^t \sin W(s)ds, \qquad t \geq 0.$$
   Gibt es eine Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass $S - \gamma A$ ein Martingal ist? Wenn ja, geben Sie eine solche Zahl an, und Sie brauchen keine Begründung angeben. Wenn nein, begründen Sie genau, warum nicht. Hinweis: $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

2. In dieser Aufgabe betrachten wir einen AR(1) Prozess
   $$x_t = ax_{t-1} + \epsilon_t, \ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2) \ \text{ und } |a| < 1.$$

   (a) Berechnen Sie zunächst die Autokovarianzfunktion von (x_t), d.h. $\gamma_x(k) = \mathrm{Cov}\ (x_{t+k}, x_t)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Hinweis: Sie können z.B. die Yule-Walker Gleichungen verwenden.

   (b) Berechnen Sie die Kovarianzen $\mathrm{Cov}(x_t, \epsilon_s)$ für $t, s \in \mathbb{Z}$. Hinweis: Der Prozess (x_t) hat die MA(∞) Darstellung
   $$x_t = \sum_{j \geq 0} a^j \epsilon_{t-j}.$$

   (c) Zeigen Sie nun, dass der Prozess $(y_t = x_t + \epsilon_t)$ stationär ist und berechnen Sie die Autokovarianzfunktion von (y_t), d.h. $\gamma_y(k) = \mathrm{Cov}(y_{t+k}, y_t)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

   (d) Zeigen Sie auch, dass (y_t) ein ARMA(1,1) Prozess ist. Hinweis: Setzen Sie $(x_s = y_s - \epsilon_s)$ in die AR Gleichung oben ein.

3. Gegeben sei der ARMA(1,1) Prozess (x_t), der durch das ARMA System
   $$x_t = 0.5x_{t-1} + \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1}$$
   definiert ist. Der Prozess $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = 1)$ ist ein white noise Prozess mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = \sigma^2 = 1$.

   (a) Überprüfen Sie, ob das obige ARMA System die Stabilitäts Annahme, die (strikte) Minimum-Phase Annahme und die "Koprimheits" Annahme erfüllt.

   (b) Berechnen Sie die MA(∞) Darstellung $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{b}_j \epsilon_{t-j}$ des Prozesses (x_t).

   (c) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t)$ des Prozesses.

   (d) Was fällt Ihnen bei den Punkten (b) und (c) auf? Gibt es einen Zusammenhang mit Punkt (a)?

4. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,2,3,4,5,6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und folgendem Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ und $h_i = \mathbb{P}_i[T < \infty]$ für $i \in I$. Bestimmen Sie h_i für alle $i \in I$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T]$.

(c) Bestimmen Sie die Kommunikationsklasse des Zustandes 1, d.h., geben Sie alle Zustände an, die mit dem Zustand 1 kommunizieren.

(d) Welche Zustände sind rekurrent, welche transient? (Begründung muß bei dieser Teilaufgabe nicht sein.)

(e) Sei V_3 die Zahl der Besuche des Zustandes 3, also

$$V_3 = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=3\}}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}_3[V_3 > r]$ für $r = 1, 2, 3$ und tragen Sie die Werte auf vier Nachkommastellen genau in die untenstehende Tabelle ein.

r	1	2	3
$\mathbb{P}_3[V_3 > r]$			