Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2019S, VO, 2.5h, 4.0EC
29.November 2019
Hubalek/Scherrer

90 Minuten

Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Betrachten Sie den Prozess

$$(x_t = \cos(\lambda t + \phi) \,|\, t \in \mathbb{Z}),$$

wobei $\phi \in [-\pi, \pi]$ eine reelle Zahl ist und $\lambda \sim U([-\pi, \pi])$ eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist.

   (a) Skizzieren Sie ein, zwei typische Trajektorien von (x_t).

   (b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbf{E}x_t$ $(\forall t \in \mathbb{Z})$.

   (c) Berechnen Sie $\mathbf{E}x_t x_s$ und die Kovarianzen $\mathbf{Cov}(x_t, x_s)$ $(\forall t, s \in \mathbb{Z})$.

   (d) Ist der Prozess (x_t) schwach stationär?

   Hinweis: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ für α, $\beta \in \mathbb{R}$.

2. Gegeben ist folgendes AR(2) System:

$$x_t = 0x_{t-1} + (3/4)x_{t-2} + \epsilon_t$$

wobei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ und $\sigma^2 = 1$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Stabilitätsbedingung erfüllt ist.

   (b) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$ des Prozesses $(x_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$.

   (c) Wir betrachten nun den (stationären) Prozess

$$(y_t = x_t - (4/3)x_{t-2} \,|\, t \in \mathbb{Z}).$$

   Zeigen Sie, dass (y_t) ein white noise Prozess ist. Hinweis: Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma_y(k) = \mathbf{Cov}(y_{t+k}, y_t)$ von (y_t) und zeigen Sie, dass $\gamma_y(k) = 0$ für $k \neq 0$ gilt.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Sei

$$A(t) = tW(1) + (1 - t)W(t), \quad t \geq 0.$$

   Ist A ein Gaußscher Prozess? Wenn ja, geben sie die Mittelwert- und die Kovarianzfunktion an, wenn nein, begründen Sie sorgfältig, warum nicht.

   (b) (Fortsetzung) Berechnen Sie $E[A(t)|\mathcal{F}(s)$ für (i) $1 < s < t$ und für (ii) $0 < s < t < 1$.

   (c) Sei

$$H(t) = \sqrt{5}I_{[0,\frac{1}{2})}(t) + W\left(\frac{1}{2}\right)^2 I_{[\frac{1}{2},1)}(t), \quad t \geq 0.$$

   Für einen bestimmten Pfad soll

$$W\left(\frac{1}{2}\right) = -0.13, \quad W(1) = 0.96$$

   gelten. Ermitteln Sie für diesen Pfad

$$\int_0^\infty H(t)dW(t) = \underline{\hspace{4cm}}.$$

   (d) Sei

$$f(t) = \frac{W(t)}{1 + t^2}, \quad t \geq 0.$$

   Ist $f \in M^2$?. Wenn ja, berechnen Sie die M^2-Norm von f, wenn nein, geben Sie eine sorgfältige Begründung, warum nicht.

(e) Sei

$$\xi(t) = \frac{t}{1 + W(t)^2}, \quad t \geq 0.$$

Dann ist ξ ein Ito-Prozess, der in der Form

$$\xi(t) = \int_0^t \mu(s, W(s))ds + \int_0^t \sigma(s, W(s))dW(s), \quad t \geq 0,$$

dargestellt werden kann. Berechnen Sie mit der Ito-Formel die Funktionen

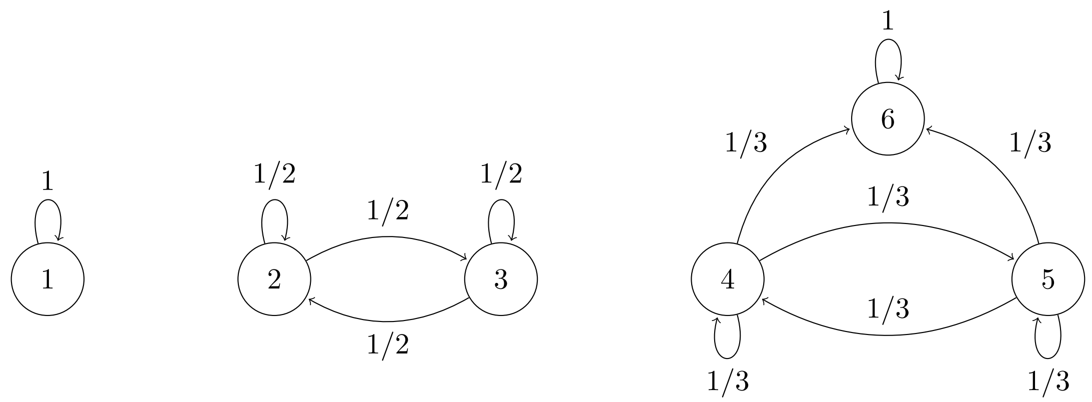
$$\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

und geben Sie die Werte

$$\mu(1, 2) = \underline{\hspace{3cm}}, \quad \sigma(3, 3) = \underline{\hspace{3cm}}$$

an.

4. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/21, 2/21, 3/21, 4/21, 5/21, 6/21)$ und folgendem Übergangsgraph:



(a) Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 6\}$ und $h_i = \mathbb{P}_i[T < \infty]$ für $i \in I$. Mit der Markov-Eigenschaft sehen wir, dass $h = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)'$ ein lineares Gleichungssystem der Form $h = Ah + b$ erfüllt. Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor b.

(b) Sei $k_i = \mathbb{E}_i[T]$ für $i \in I$ und $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)'$. Bestimmen Sie k.

(c) Wie viele Kommunikationsklassen hat die Kette? (Begründung muß bei dieser Teilaufgabe nicht sein.)

(d) Welche Zustände sind rekurrent, welche transient? (Begründung muß bei dieser Teilaufgabe nicht sein.)

(e) Berechnen Sie $p_{44}^{(n)}$ für $n \geq 0$, ermitteln Sie $\sum_{n \geq 0} p_{44}^{(n)}$, und interpretieren Sie das Ergebnis.