Name:

Mat.Nr.: Studium:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2019S, VO, 2.5h, 4.0EC
30.September 2019
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. In dieser Aufgabe geht es um einen AR(2) Prozess (x_t):

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \epsilon_t, \;\; (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2).$$

Die Autokovarianzen bis zum lag 2 sind bekannt:

$$\gamma(0) = 25, \, \gamma(1) = 0, \, \gamma(2) = 15.$$

(a) Berechnen Sie die AR-Koeffizienten a_1, a_2 und die Varianz σ^2. Hinweis: Verwenden Sie die Yule-Walker Gleichungen und zeigen Sie insbesondere $a_1 = 0$.

(b) Überzeugen Sie sich, dass das AR Modell die Stabilitätsbedingung erfüllt.

(c) Berechnen Sie die MA(∞) Darstellung des Prozesses. Hinweis: es gilt $x_t = \sum_{j \geq 0} b_j \epsilon_{t-2j}$.

(d) Zeigen Sie, dass $\gamma(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, die nicht durch 2 teilbar sind. Hinweis: Sie können die Yule-Walker Gleichungen verwenden oder die MA(∞) Darstellung von Punkt (c).

(e) Sei $\hat{x}_{t+h}$ die h-Schrittprognose für x_{t+h} aus der unendlichen Vergangenheit (d.h. gegeben $(x_s, \, s \leq t)$) und σ_h^2 die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers. Zeigen Sie für $h = 1$ und $h = 2$, dass

$$\hat{x}_{t+h} = a_2 x_{t+h-2}$$

und

$$\sigma_h^2 = \sigma^2.$$

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Sei $0 < s < t < u < v$. Berechnen Sie

      i. $\text{Cov}[W(t) - W(s), W(v) - W(u)]$ und

      ii. $\text{Cov}[W(v) - W(s), W(u) - W(t)]$.

   (b) Gegeben seien zwei reelle Konstante α und β. Weiters sei $A(t) = \alpha W(t)^2 + \beta t$ für $t \geq 0$. Berechnen Sie die Mittelwertfunktion und die Kovarianzfunktion des Prozesses $(A(t), t \geq 0)$.

   (c) (Fortsetzung) Für welche Wahlen von α und β ist A ein Martingal. Sie sollen dabei nicht einzelne Beispiele geben, sondern *alle* Kombinationen von Konstanten α und β, sodass A ein Martingal ist, angeben.

   (d) (Fortsetzung) Zeigen Sie, dass A ein Ito-Prozess ist und ermitteln sie die Prozesse $(a(t), t \geq 0)$ und $(b(t), t \geq 0)$ für die entsprechende Darstellung

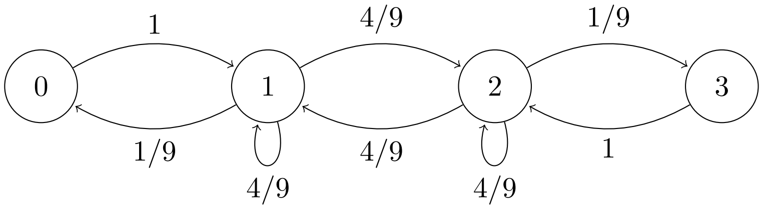
$$A(t) = A(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s).$$

   (e) Gegeben seien zwei reelle Konstante α und β. Weiters sei

$$B(t) = \alpha W(t) + \beta t, \quad C(t) = \int_0^t B(s)dW(s), \quad t \geq 0.$$

   Berechnen Sie die Varianz von $C(t)$ mit der Ito-Isometrie.

3. (a) Ein einfaches Experiment mit zwei Urnen und drei schwarzen und drei weißen Kugeln kann durch eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{0, 1, 2, 3\}$ beschrieben werden. Die Anfangsverteilung ist δ_0, die Übergangswahrscheinlichkeiten sind in folgendem Übergangsgraph gegeben.



Geben Sie die Verteilung von X_2 an, also $\mathbb{P}[X_2 = i]$ für $i = 0, 1, 2, 3$.

(b) (Fortsetzung) Sei H die Trefferzeit für den Zustand 3. Berechnen Sie $\mathbb{E}[T]$.

(c) (Fortsetzung) Bestimmen Sie

- $\mathbb{P}[X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0]$ und
- $\mathbb{P}[X_3 = 2 | X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0]$.

(d) (Fortsetzung) Bestimmen Sie

- $\mathbb{P}[X_3 = 2, X_2 = 1 | X_1 = 1, X_0 = 0]$ und
- $\mathbb{P}[X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0 | X_3 = 2]$.

Hinweis: Bei der letzten Wahrscheinlichkeit könnte Aufgabe (a) hilfreich sein.

(e) Gegeben sei eine Markovkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$, Anfangsverteilung $\lambda = \delta_0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{00} = 1/4$, $p_{01} = 3/4$,

$$p_{i,i-1} = \frac{1}{4}, \quad p_{i,i+1} = \frac{3}{4}, \quad i \geq 1,$$

und alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten sind null. Die Trefferwahrscheinlichkeiten des Zustandes 0 werden mit $(h_i : i \in I)$ bezeichnet.

Mit der schwachen Markov-Eigenschaft ergibt sich ein (unendliches) lineares Gleichungssystem für $(h_i : i \in I)$. Aus Zeitgründen ist dessen allgemeine Lösung für Sie schon berechnet, sie ist

$$x_i = \frac{1}{2}\left(3^{1-i} - 1 + \left(3 - 3^{1-i}\right)\xi\right)$$

mit beliebigem $\xi \in \mathbb{R}$. Wie groß ist h_2?

4. $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ sei ein white noise Prozess mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = \sigma^2 = 1$. Betrachten Sie folgende Differenzengleichungen:

   (a) $x_t = x_{t-1}$
   (b) $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$
   (c) $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$
   (d) $x_t = 0.5x_{t-1}$
   (e) $x_t = 0.5x_{t-1} + \epsilon_t$

   Existiert eine stationäre Lösung (x_t) und wenn ja, ist diese eindeutig? Hinweis zu (c): Betrachten Sie den Prozess $(\tilde{x}_t = c + \epsilon_t)$, $c \in \mathbb{R}$.