Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2019S, VO, 2.5h, 4.0EC
28.Juni 2019
Hubalek/Scherrer

90 Minuten

Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Gegeben sei der ARMA(1,1) Prozess (x_t), der durch das ARMA System

$$x_t = 0.5x_{t-1} + \epsilon_t + 0.5\epsilon_t$$

definiert ist. Der Prozess $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = 4)$ ist ein white noise Prozess mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = \sigma^2 = 4$.

   (a) Überprüfen Sie, ob das obige ARMA System die Stabilitäts Annahme, die (strikte) Minimum-Phase Annahme und die "Koprimheits" Annahme erfüllt.

   (b) Berechnen Sie die MA(∞) Darstellung $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{b}_j \epsilon_{t-j}$ des Prozesses (x_t).

   (c) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t)$ des Prozesses.

   (d) Der Prozess (x_t) besitzt auch eine alternative ARMA Darstellung

   $$x_t = 0.5x_{t-1} + \bar{\epsilon}_t + 2\bar{\epsilon}_{t-1},$$

   wobei $(\bar{\epsilon}_t) \sim \mathrm{WN}(\bar{\sigma}^2 = 1)$ eine white noise Prozess mit Varianz $\bar{\sigma}^2 = 1$ ist. (Das müssen Sie nicht beweisen.) Wir betrachten die Einschrittprognose-Fehler $\hat{u}_{t+1} = x_{t+1} - \hat{x}_{t+1}$ aus der unendlichen Vergangenheit. Gilt nun

      i. $\hat{u}_{t+1} = \epsilon_{t+1}$ oder
      ii. $\hat{u}_{t+1} = \bar{\epsilon}_{t+1}$ oder
      iii. $\hat{u}_{t+1} \neq \epsilon_{t+1}$ und $\hat{u}_{t+1} \neq \bar{\epsilon}_{t+1}$?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Sei $0 < s < t < u < v$. Berechnen Sie

      i. $\mathrm{Cov}[W(t) - W(s), W(v) - W(u)]$ und

      ii. $\mathrm{Cov}[(W(t) - W(s))^2, (W(v) - W(u))^2]$.

   (b) Sei $A(t) = W(t)^2$ für $t \geq 0$. Berechnen Sie die Mittelwertfunktion und die Kovarianzfunktion des Prozesses $(A(t), t \geq 0)$. Ist $(A(t), t \geq 0)$ ein Gaußscher Prozess? (Begründung, die Definition eines Gaußschen Prozesses wiedergeben reicht nicht!)

   (c) Sei
   $$f(t, x) = e^{ax+bt}, \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}.$$
   und $Y(t) = f(t, W(t))$ für $t \geq 0$. Dann ist $(Y(t), t \geq 0)$ ein Ito-Prozess. Wenden Sie die Ito-Formel an und geben Sie die entsprechende Darstellung von Y als Summe von Anfangswert, Lebesgue-Integral und Ito-Integral an.

   (d) Für welche a und b ist Y ein Martingal? (Allgemein, nicht ein Beispiel!)

   (e) Für welche a und b ist $Y \in M^2$? (Allgemein, nicht ein Beispiel!)

3. (a) Drei weiße und drei schwarze Kugeln werden auf zwei Urnen verteilt, sodass beide Urnen jeweils drei Kugeln enthalten. Wir beschreiben dieses System durch eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{0, 1, 2, 3\}$, wobei der Zustand i bedeutet, dass in der ersten Urne i weiße Kugeln sind.

Im ersten Schritt ziehen wir aus beiden Urnen ein Kugel. Die Kugel aus der ersten Urne legen wir dann in die zweit Urne und umgekehrt. Der Vorgang wird wiederholt und X_n beschreibt das System nach n Schritten. Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten und skizzieren Sie den Übergangsgraphen. [Aufgabe aus dem Buch von Ross, etwas vereinfacht.]

(b) Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{0, 1\}$, Anfangsverteilung $\lambda_0 = 1/2$, $\lambda_1 = 1/2$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

- $\mathbb{P}[X_3 = 0, X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0]$ und
- $\mathbb{P}[X_3 = 0 | X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0]$.

(c) (Fortsetzung) Bestimmen Sie

- $\mathbb{P}[X_3 = 0, X_2 = 1 | X_1 = 1, X_0 = 0]$ und
- $\mathbb{P}[X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0 | X_3 = 0]$.

(d) Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$, Anfangsverteilung $\lambda = \delta_0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{00} = 1/3$, $p_{01} = 2/3$,

$$p_{i,i-1} = \frac{1}{3}, \quad p_{i,i+1} = \frac{2}{3}, \quad i \geq 1,$$

und alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten sind null. Sei

$$H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$$

die Trefferzeit für den Zustand 0, und $h_i = \mathbb{P}_i[H < \infty]$ die entsprechenden Trefferwahrscheinlichkeiten Mit der schwachen Markov-Eigenschaft ergibt sich ein (unendliches) lineares Gleichungssystem für $(h_i : i \in I)$. Stellen Sie dieses System auf und zeigen Sie, dass dessen allgemeine Lösung

$$x_i = -1 + 2^{1-i} + \xi(2 - 2^{1-i}), i \geq 0,$$

mit beliebigem $\xi \in \mathbb{R}$ ist.

(e) Welche dieser Lösungen, d.h. welche Wahl von ξ, ergibt die Trefferwahrscheinlichkeiten $(h_i : i \in I)$?

4. Betrachten Sie den Prozess

$$(x_t = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t) \,|\, t \in \mathbb{Z}),$$

wobei $0 < \lambda < \pi$ und A, B zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariable sind mit $\mathbf{E}A = \mathbf{E}B = 0$, $\mathbf{E}A^2 = \mathbf{E}B^2 = 1$ und $\mathbf{E}[AB] = 0$.

(a) Skizzieren Sie eine "typische" Trajektorie des Prozesses für $\lambda = \frac{2\pi}{10}$.

(b) Berechnen Sie $\mathbf{E}x_t$ und $\mathbf{E}x_t x_s$ für alle $t, s \in \mathbb{Z}$. Hinweis: $\cos(\theta)\cos(\mu) + \sin(\theta)\sin(\mu) = \cos(\theta - \mu)$.

(c) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) stationär ist und berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$.

(d) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} A &= x_0 \\ B &= (x_0\cos(\lambda) - x_{-1})/\sin(\lambda) \end{aligned}$$

(e) Warum folgt aus Punkt (d), dass sich der Prozess perfekt aus den letzten zwei Beobachtungen prognostizieren lässt? Geben Sie auch die Koeffizienten der Einschritt-Prognose $\hat{x}_{t+1} = c_1 x_t + c_2 x_{t-1}$ aus $k = 2$ vergangenen Werten an. (Diese Prognose ist wie gesagt perfekt. Die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers ist gleich Null!)