1.März 2019

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen, Hubalek/Scherrer

90 Minuten. Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

---

1. Die monatlichen Verkausfzahlen der Firma "verygood" für die letzten drei Jahre sind (5 Pkt.)

	2016	2017	2018	2019
Jänner	1150	.	.	1200
Februar	1000	.	.	1250
März	.	.	.	?
⋮	⋮	⋮	⋮	
November	1200	.	1150	
Dezember	1300	.	1190	

Im Mittel hat die Firma in den letzten Jahren 1120 Stück pro Monat verkauft und die (geschätzte) Autokovarianzfunktion der Verkaufszahlen ist

$\hat{\gamma}(0)$=100 $\hat{\gamma}(1)$=80 $\hat{\gamma}(2)$=90 $\hat{\gamma}(3)$=70 $\hat{\gamma}(4)$=65 ...

(a) Schätzen Sie zunächst ein AR(2) Modell für die Verkaufszahlen.

(b) Berechnen Sie eine Prognose für die Verkäufe im März 2019.

(c) Geben Sie auch eine Maßzahl für die Unsicherheit Ihrer Prognose an.

Hinweis: Für die Punkte (b) und (c) sollten Sie natürlich das in (a) geschätzte AR Modell verwenden. Die Angaben sind alle gerundet, Sie können daher Ihre Ergebnisse auch sinnvoll runden.

2. Gegeben sei ein white noise Prozess $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$. Wir betrachten nun die Prozesse $(x_t = d_0 + d_1 t + \epsilon_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ und $(y_t = x_t - x_{t-1} \,|\, t \in \mathbb{Z})$, wobei $(d_0, d_1 \in \mathbb{R})$. (5 Pkt.)

(a) Berechnen Sie $\mathbf{E}x_t$ und $\mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$. (Drücken Sie diese Größen durch die Parameter d_0, d_1 und σ^2 aus.)

(b) Ist der Prozess (x_t) schwach stationär? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(c) Berechnen Sie $\mathbf{E}y_t$ und $\mathbf{Cov}(y_{t+k}, y_t)$. (Drücken Sie diese Größen durch die Parameter d_0, d_1 und σ^2 aus.)

(d) Ist der Prozess (y_t) schwach stationär? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(e) Berechnen Sie die h-Schritt Prognose für x_{t+h} und geben Sie auch die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers an.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W. (5 Pkt.)

(a) Gegeben sei der Prozess $(H(t), t \geq 0)$ mit

$$H(t) = W(1)I_{[1,2)}(t) + W(2)I_{[3,4)}(t), \quad t \geq 0.$$

Weisen Sie genau und detailliert nach, dass $H \in M^2_{\text{step}}$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[H(t)]$ und $\mathrm{Var}[H(t)]$ in Abhängigkeit von $t \geq 0$.

(c) Berechnen Sie möglichst explizit

$$I_T(H) = \int_0^T H(t)dW(t)$$

in Abhängigkeit von $T > 0$.

(d) Sei

$$I(H) = \int_0^\infty H(t)dW(t)$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}[I(H)^2]$ mit einer Methode Ihrer Wahl. Gesucht ist ein Zahlenwert!

(e) Ebenso $\mathbb{E}[I(H)^3]$.

4. Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $\{1, 2, 3, 4\}$, Übergangsmatrix (5 Pkt.)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und Anfangsverteilung $\lambda = (1/2, 1/2, 0, 0)$.

(a) Berechnen Sie

i. $\mathbb{P}[X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1]$ und

ii. $\mathbb{P}[X_0 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1]$.

(b) Ermitteln Sie die Kommunikationsklassen der Kette! Welche Klassen sind transient, welche rekurrent?

(c) Sei

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{1, 4\}\}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}[T < \infty]$ und $\mathbb{P}_2[T = 2]$.

(d) Berechnen Sie die erwarteten Trefferzeiten $k_i = \mathbb{E}_i[T]$ für $i = 1, \ldots, 4$.

(e) Bestimmen Sie die Varianz von T unter $\mathbb{P}_3$.