30.November 2018

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen, Hubalek/Scherrer

90 Minuten. Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

---

1. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W. (5 Pkt.)

   (a) Geben Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $(W(2), W(3), W(5))$ an.

   (b) Sei $0 < r < s$ gegeben. Ermitteln Sie $E[(W(s) - W(r))^2 | \mathcal{F}(t)]$ für alle $t \geq 0$.

   (c) Untersuchen Sie, ob die folgenden Prozesse M^2_{step}-Funktionen sind. Diskutieren Sie dazu genau die relevanten Messbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen.

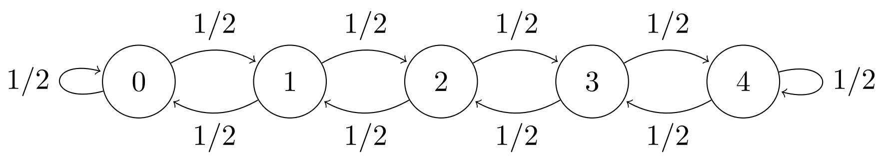
   - $$U(t) = I_{[0,\sqrt{2})}(t) + W(\sqrt{2}) I_{[\frac{3}{2},4)}(t), \quad t \geq 0$$
   - $$V(t) = \sum_{k=1}^{n} W\left(\frac{k}{n}\right) I_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}(t), \quad t \geq 0.$$

     Dabei sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ gegeben.

   (d) Sei
   $$X(t) = \sum_{k=1}^{n} W\left(\frac{k-1}{n}\right) I_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}(t), \quad t \geq 0,$$
   mit $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ gegeben. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von
   $$A = \int_0^\infty X(t) dW(t)$$
   mit einer Methode ihrer Wahl. Geben Sie auch Zahlenwerte für $n = 100$ an.

   (e) Sei $\varphi \in (-\pi, \pi]$ gegeben und
   $$S(t) = \sin(W(t) + \varphi), \quad t \geq 0.$$
   Finden Sie mithilfe der Ito-Formel die eine Darstellung von $(S(t), t \geq 0)$ als Ito-Prozess mit Anfangswert, Ito-Integral und Lebesgue-Integral. Geben Sie das Ergebnis auch in Differentialschreibweise $dS(t) = \ldots$ an.

2. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/3, 1/3, 0, 0, 1/3)$ und folgendem Übergangsgraph (5 Pkt.)



   (a) Berechnen Sie
   - $\mathbb{P}[X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 0]$,
   - $\mathbb{P}[X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 0]$.

   (b) Ist die Kette irreduzibel? Geben Sie eine kurze konkrete Begründung für ihre Antwort, schreiben Sie nicht die allgemeine Definition von *irreduzibel* auf.

(c) Sei $H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$ und $h_i = \mathbb{P}_i[H < \infty]$ für $i \in I$. Geben Sie $(h_0, \dots, h_4)$ an!

(d) Stellen Sie mit der Markov-Eigenschaft ein lineares Gleichungssystem für $k_i = \mathbb{E}_i[H]$ für $i \in I$. Darin sollten konkrete Zahlen vorkommen, nicht die allgemeine Theorie aufschreiben! Ermitteln Sie k_4.

(e) Gegeben sei eine neue Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit unendlichem Zustandsraum $\mathbb{Z}_+$ und Übergangsmatrix P, wobei

$$p_{00} = \frac{1}{2}, \quad p_{01} = \frac{1}{2}, \quad p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad p_{i,i+1} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 1,$$

und alle nicht angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten 0 sind. Sei

$$H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}, \quad h_i = \mathbb{P}_i[T < \infty], \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Mithilfe der Markov-Eigenschaft von X ergibt sich das lineares Gleichungssystem

$$h_0 = 1, \quad h_i = \frac{1}{2}h_{i-1} + \frac{1}{2}h_{i+1}, \quad i \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass dieses System unendlich viele Lösungen hat. Welche davon entspricht den oben eindeutig definierten Trefferwahrscheinlichkeiten?

3. Gegeben ist folgender ARMA(1,1) Prozess (5 Pkt.)

$$x_t = 0.5x_{t-1} + \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1}, \ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = 1).$$

(a) Überprüfen Sie die Stabilitäts Bedingung, die (strikte) Minimum-Phase Bedingung und die "Koprimheits-Annahme".

(b) Berechnen Sie die 1-Schritt und die 2-Schritt Prognose aus der unendlichen Vergangenheit und die entsprechenden Prognosefehler-Varianzen.
Es genügt, wenn Sie die Prognosen ($\hat{x}_{t+1}$ bzw. $\hat{x}_{t+2}$) als Funktion von x_s, $s \leq t$ und ϵ_s, $s \leq t$ darstellen.
Drücken Sie die Prognosefehler ($(x_{t+1} - \hat{x}_{t+1})$ bzw. $(x_{t+2} - \hat{x}_{t+2})$) durch ϵ_{t+1} und ϵ_{t+2} aus. Aus dieser Darstellung kann man dann auch leicht die Varianzen berechnen.

4. In dieser Aufgabe betrachten wir einen AR(1) Prozess (5 Pkt.)

$$x_t = ax_{t-1} + \epsilon_t, \ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2) \ \text{ und } |a| < 1.$$

(a) Berechnen Sie zunächst die Autokovarianzfunktion von (x_t), d.h. $\gamma_x(k) = \mathrm{Cov}\ (x_{t+k}, x_t)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Hinweis: Sie können z.B. die Yule-Walker Gleichungen verwenden.

(b) Berechnen Sie die Kovarianzen $\mathrm{Cov}\ (x_t, \epsilon_s)$ für $t, s \in \mathbb{Z}$. Hinweis: Der Prozess (x_t) hat die MA(∞) Darstellung

$$x_t = \sum_{j\geq 0} a^j \epsilon_{t-j}.$$

(c) Zeigen Sie nun, dass der Prozess ($y_t = x_t + \epsilon_t$) stationär ist und berechnen Sie die Autokovarianzfunktion von (y_t), d.h. $\gamma_y(k) = \mathrm{Cov}(y_{t+k}, y_t)$ für $k \in \mathbb{Z}$.