Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2018S, VO, 2.5h, 4.0EC
28.September 2018
Hubalek/Scherrer

90 Minuten

Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. (a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen einer Markovkette mit Zustandsraum $\{1, 2, 3, 4\}$, sodass die Kette zwei Kommunikationsklassen $C_1 = \{1, 2\}$ und $C_2 = \{3, 4\}$ hat, wobei C_1 rekurrent und C_2 transient sein soll. Verwenden Sie konkrete Zahlenwerte für die Übergangswahrscheinlichkeiten.

   (b) Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/5, 2/5, 2/5)$ und folgender Übergangmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie

   i. $\mathbb{P}[X_3 = 1, X_2 = 3, X_1 = 3]$,

   ii. $\mathbb{P}[X_3 = 1 | X_2 = 3, X_1 = 3, X_0 = 2]$.

   (c) (Fortsetzung) Sei

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 3\}.$$

   die Trefferzeit für den Zustand 3 unter $\mathbb{P}_1$. Berechnen Sie $\mathbb{E}_1[T]$.

   (d) Gegeben sei eine Markovkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{0, 1, 2\}$, einer Anfangsverteilung λ und Übergangsmatrix P. Es gelte $\lambda_i > 0$ und $p_{ij} > 0$ für alle $i, j \in I$. Sei $H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ und $h_i = P_i[H < \infty]$ für $i \in I$. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung von (h_0, h_1, h_2) möglichst übersichtlich dar.

   (e) Ist das Gleichungssystem aus der vorherigen Teilaufgabe immer eindeutig lösbar? Wenn ja, geben Sie einen Beweis, wenn nein, ein konkretes Gegenbeispiel.

2. Sei (ϵ_t) ein white noise Prozess mit Varianz σ^2. Sind die folgenden Prozesse (x_t) stationär? Begründen Sie Ihre Antwort! Berechnen Sie auch immer (wenn möglich) die Erwartungswerte $\mathbf{E}x_t$ und die Kovarianzen $\mathbf{Cov}(x_t, x_s)$ für $t, s \in \mathbb{Z}$.

   (a) $(x_t = \epsilon_t + \epsilon_{-t})$

   (b) $(x_t = \frac{1}{5}(\epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t + \epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2}))$

   (c) $(x_t = (1 + \epsilon_t)^2)$ (Hinweis: hier genügt es zu argumentieren, wieso dieser Prozess im allgemeinen nicht schwach stationär ist.)

   (d) $(x_t = (1 + t)^2 + \epsilon_t)$

   (e) $(x_t = 1\epsilon_{-t} + 2\epsilon_{1-t})$

3. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W. Wir fixieren nun drei Zeitpunkte $0 < r < s < t$.

   (a) Geben Sie $\mathbb{E}[(W(t) + W(r))^2 | \mathcal{F}(s)]$ und $E[(W(t) + W(s))^2]$ an.

   (b) Wir fixieren nun drei Zeitpunkte $0 < r < s < t$ und definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
   $$f(c_1, c_2) = \mathbb{E}[(W(t) - c_1 W(r) - c_2 W(s))^2], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Finden Sie c_1, c_2 sodass $f(c_1, c_2)$ minimal wird. (Begründung!)

   (c) Sei c_1^*, c_1^* die Lösung aus der vorherigen Teilaufgabe. Geben Sie $f(c_1^*, c_2^*)$ an.

   (d) Sei
   $$H(t) = \exp\left(-W(t)^2 + \frac{1}{2} W(t) - t\right), \quad t \geq 0.$$
   Dann ist H ein Ito-Prozess. Das müssen und sollen Sie bei dieser Prüfung nicht zeigen. Sie sollen aber die entsprechende Darstellung von H als Ito-Prozess in Differential- *und* Integralform angeben.

   (e) Die letzte Aufgabe ist etwas anspruchsvoller. Untersuchen Sie, ob $H \in M^2$ oder nicht! (Genaue Begründung)!

4. Gegeben ist folgendes AR System:

$$x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \epsilon_t, \ \ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2).$$

(a) Erfüllt dieses AR System die Stabilitätsbedingung?

(b) Wir betrachten nun eine spezielle Lösung des AR Systems, die mit $x_0 = x_{-1} = 0$ "startet": Berechnen Sie x_1, x_2, x_3, d.h. stellen Sie x_1, x_2, x_3 als Linearkombination von ϵ_3, ϵ_2, $\ldots$ dar. Ist diese Lösung stationär?

(c) Berechnen Sie die Varianzen und Kovarianzen $\mathbf{Cov}(x_t, x_s)$ für $t, s = 1, 2, 3$.

(d) Zeigen Sie, dass $\hat{x}_4 = 2x_3 - x_2$ die beste Prognose für x_4 gegeben x_3, x_2, x_1 ist und berechnen Sie auch die Varianz des Prognosefehlers ($\mathbf{E}(x_4 - \hat{x}_4)^2$).

(e) Zeigen Sie, dass $\hat{x}_5 = 3x_3 - 2x_2$ die beste Prognose für x_5 gegeben x_3, x_2, x_1 ist und berechnen Sie auch die Varianz des Prognosefehlers ($\mathbf{E}(x_5 - \hat{x}_5)^2$). (Hinweis für die letzten beiden Punkte können Sie z.B. den Projektionssatz verwenden.)