Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2018S, VO, 2.5h, 4.0EC
29.Juni 2018
Hubalek/Scherrer

90 Minuten

Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Gegeben ist ein white noise Prozess $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ mit $\sigma^2 > 0$. Betrachten Sie nun den Prozess $(x_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$, der definiert ist durch

$$
\begin{aligned}
x_t &= 0 && \text{für } t \leq 0 \\
x_t &= -x_{t-1} + \epsilon_t && \text{für } t > 0.
\end{aligned}
$$

   (a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbf{E}x_t$ und die Autokovarianzfunktion $\gamma(t,s) = \mathbf{Cov}(x_t, x_s)$.

   (b) Ist dieser Prozess (x_t) stationär?

   (c) Zeigen Sie, dass die optimale h Schrittprognose für x_{t+h} (für $t > 0$ und $h > 0$) aus der unendlichen Vergangenheit (d.h. gegeben $(x_s,\ s \leq t)$) einfach gleich

$$\hat{x}_{t+h} = (-1)^h x_t$$

   ist. Hinweis: Verwenden Sie den Projektionssatz.

   (d) Berechnen Sie die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers $\hat{u}_{t+h} = x_{t+h} - \hat{x}_{t+h}$.

2. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Geben Sie $\mathbb{E}[W(s)]$, $\mathbb{E}[W(s)^2]$, $\mathbb{E}[W(t)^2]$, $\mathbb{E}[W(t)^4]$ und $\mathbb{E}[W(s)W(t)^2]$ für $0 \leq s \leq t$ an.

   (b) Wir fixieren nun zwei Zeitpunkte $0 < s < t$ und definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch[1]

   $$f(c_0, c_1) = \mathbb{E}[(W(t)^2 - c_0 - c_1 W(s))^2], \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

   Finden Sie c_0, c_1 sodass $f(c_0, c_1)$ minimal wird. (Begründung!)

   (c) Sei c_0^*, c_1^* die Lösung aus der vorherigen Teilaufgabe. Geben Sie $f(c_0^*, c_1^*)$ an.

   (d) Gibt es eine $\mathcal{F}(s)$-messbare Zufallsvariable Y mit $\mathbb{E}[(W(t) - Y)^2] < f(c_0^*, c_1^*)$? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an und berechnen Sie $\mathbb{E}[(W(t) - Y)^2]$, wenn nein, geben Sie eine Begründung, warum nicht.

   (e) Sei

   $$f(t) = e^{-t^2/4}, \quad t \geq 0.$$

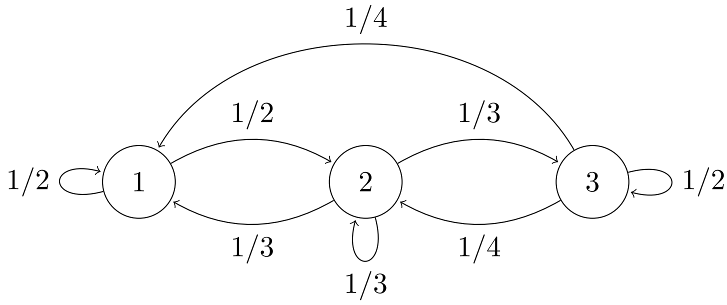
   Ist $f \in M^2$? Wenn ja, berechnen Sie die Varianz des stochastischen Integrals

   $$\int_0^\infty f(t) dW(t)$$

   mit einer Methode ihrer Wahl, und geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl gerundet auf vier Nachkommastellen an. Wenn nein, geben Sie eine Begründung warum nicht?

[1] Übersehen Sie nicht das Quadrat bei $W(t)^2$!

3. (a) Gegeben sei eine Markovkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (0, 2/5, 3/5)$ und folgendem Übergangsgraph:



Berechnen Sie

i. $\mathbb{P}[X_3 = 1, X_2 = 3, X_1 = 3 | X_0 = 2]$,

ii. $\mathbb{P}[X_3 = 1 | X_2 = 3, X_1 = 3, X_0 = 2]$.

(b) (Fortsetzung) Sei

$$H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}.$$

die Trefferzeit für den Zustand 1.

i. Stellen Sie das Gleichungssystem für die Trefferwahrscheinlichkeiten $h_i = \mathbb{P}_i[H < \infty]$ für $i = 1, 2, 3$ auf, das sich aus der schwachen Markov-Eigenschaft ergibt.

ii. Ermitteln Sie diese Trefferwahrschenlichkeiten.

(c) (Fortsetzung) Bestimmen Sie die erwartete Trefferzeit des Zustands 1, also $\mathbb{E}[H]$.

(d) Gegeben sei eine Markovkette $(R_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, \ldots, 8\}$, Anfangsverteilung die diskrete Gleichverteilung auf I, und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Kommunikationsklassen an. Ist die Kette irreduzibel?

(e) Gegeben sei $(Z_n)_{n\geq 0} \sim \text{Markov}(\lambda, P)$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Die Potenzen der Übergansmatrix P sind

$$P^{2n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{1-2n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2^{1-2n} \\ 2^{1-2n} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{1-2n} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1,$$

und

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 2^{-2n} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{-2n} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2^{-2n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2^{-2n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1.$$

Zerlegen Sie den Zustandsraum in Kommunikationsklassen und untersuchen sie (mit genauer Begründung) welche Klassen rekurrent bzw. transient sind.

4. In dieser Aufgabe geht es um einen AR(4) Prozess (x_t):

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_3 x_{t-3} + a_4 x_{t-4} + \epsilon_t, \ \ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2).$$

Die Autokovarianzen bis zum lag 4 sind bekannt:

$$\gamma(0) = 9,\ \gamma(1) = \gamma(2) = \gamma(3) = 0,\ \gamma(4) = 6.$$

(a) Berechnen Sie die AR-Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ und die Varianz σ^2 Hinweis: Verwenden Sie die Yule-Walker Gleichungen und zeigen Sie insbesondere $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

(b) Ã?berzeugen Sie sich, dass das AR Modell die Stabilitätsbedingung erfüllt.

(c) Berechnen Sie die MA(∞) Darstellung des Prozesses. Hinweis: es gilt $x_t = \sum_{j\geq 0} b_j \epsilon_{t-4j}$.

(d) Zeigen Sie, dass $\gamma(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, die nicht durch 4 teilbar sind. Hinweis: Sie können die Yule-Walker Gleichungen verwenden oder die MA(∞) Darstellung von Punkt (c).

(e) Sei $\hat{x}_{t+h}$ die h-Schrittprognose für x_{t+h} aus der unendlichen Vergangenheit (d.h. gegeben $(x_s,\ s \leq t)$) und σ_h^2 die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers. Zeigen Sie für $1 \leq h \leq 4$, dass

$$\hat{x}_{t+h} = a_4 x_{t+h-4}$$

und

$$\sigma_h^2 = \sigma^2.$$