Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2017S, 2.0h
26.Februar 2018
Hubalek/Scherrer

90 Minuten

Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. (a) Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $\{0,1,2,\ldots\}$, deren Anfangsverteilung durch

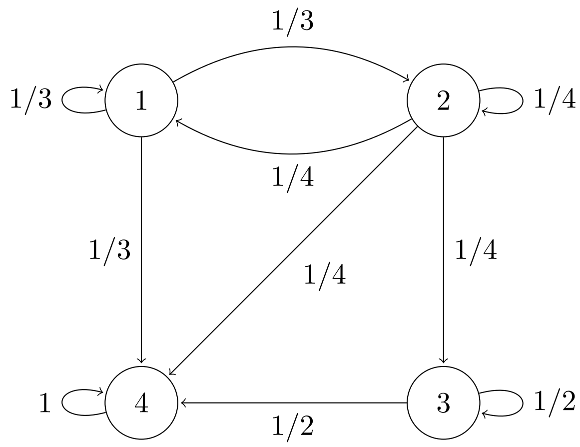
$$\mathbb{P}[X_0 = 0] = 1$$

und deren Übergangswahrscheinlichkeiten durch

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = 1 | X_n = 0] = 1, \quad \mathbb{P}[X_{n+1} = j{+}1 | X_n = j] = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}[X_{n+1} = j{-}1 | X_n = j] = \frac{3}{4},$$

für alle $n \geq 0$ und $j \geq 1$ mit $\mathbb{P}[X_n = 0] > 0$ bzw. $\mathbb{P}[X_n = j] > 0$ spezifiziert ist. Bestimmen Sie die Zweischrittübergangswahrscheinlichkeiten $P_{ij}^{(2)}$ für $i \geq 0$, $j \geq 0$. Hinweis: Eventuell ist eine Skizze des Übergangsgraphen sowie die Unterscheidung $i = 0$, $i = 1$ und $i \geq 2$ hilfreich.

(b) Gegeben sei eine Markovkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,2,3,4\}$ und folgendem Übergangsgraph



Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeiten des Zustands 3, also $h_i = \mathbb{P}_i[H < \infty]$ für $i \in I$, wobei

$$H = \inf\{n \geq 0 : Y_n = 3\}.$$

(c) Gegeben Sei eine Markovkette $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,2,3\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/3, 1/3, 1/3)$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die erwarteten Trefferzeiten des Zustands 3, also $k_i = \mathbb{E}_i[K]$ für $i \in I$, wobei

$$K = \inf\{n \geq 0 : Z_n = 3\}.$$

(d) (Fortsetzung der vorigen Teilaufgabe) Bestimmen Sie $\mathbb{P}[K < \infty]$ und $\mathbb{E}[K]$.

(e) Gegeben sei eine Markovkette $(W_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,\ldots,6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = \delta_1$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen und ermitteln Sie, welche transient bzw. rekurrent sind.

2. Gegeben ist der MA(4) Prozess

$$x_t = \epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-3} + \epsilon_{t-4}$$

wobei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ ein white noise Prozess mit Varianz $\sigma^2 = 1$ ist.

(a) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t)$.

(b) Berechnen Sie die Varianz σ_h^2 der h-Schrittprognose aus der unendlichen Vergangenheit für $h > 0$.

(c) Ist der Prozess (x_t) regulär? Geben Sie auch eine (kurze) Begründung.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

(a) Gegeben seien zwei strikt positive reelle Zahlen a und b sowie der Prozess $(X(t), t \geq 0)$ mit

$$X(t) = a + bW(t), \quad t \geq 0.$$

Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) die Verteilung von $X(t)$ für $t > 0$.

(b) Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) die endlichdimensionalen Verteilungen von $(X(t), t \geq 0)$. Ist $(X(t), t \geq 0)$ ein Gaußscher Prozess.

(c) Ist $(X(t), t \geq 0)$ ein Martingal bezüglich der gegebenen Filtration $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$. Untersuchen und begründen Sie genau, welche der drei Eigenschaften in der Definition eines Martingals erfüllt sind oder nicht.

(d) Gegeben sei der Prozess $(H(t), t \geq 0)$ mit

$$H(t) = W(1)I_{[1,2)}(t) + W(2)^2 I_{[3,4)}(t), \quad t \geq 0.$$

Begründen Sie kurz, warum $H \in M^2$ und geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für das stochastische Integral

$$\int_0^\infty H(t)dW(t)$$

an.

(e) Berechnen Sie

$$\mathrm{Var}\left[\int_0^T H(t)dW(t)\right]$$

in Abhängigkeit von $T \geq 0$.

4. Betrachten Sie den ARMA(1,1) Prozess $x_t = ax_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$, $|a| < 1$ und $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $x_t = y_t + by_{t-1}$, wobei (y_t) der durch $y_t = ay_{t-1} + \epsilon_t$ definierte AR(1) Prozess ist.

   (b) Zeigen Sie, dass (x_t) folgende MA(∞) Darstellung hat:

   $$x_t = \epsilon_t + \sum_{j\geq 0}(a+b)a^j \epsilon_{t-1-j}$$

   Hinweis: (y_t) hat die MA(∞) Darstellung $y_t = \sum_{j\geq 0} a^j \epsilon_{t-j}$ und verwenden Sie dann $x_t = y_t + by_{t-1}$.

   (c) Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion von (x_t) gegeben ist durch:

   $$\gamma_x(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-a^2}(1 + 2ab + b^2) & \text{für } k = 0 \\[2ex] \dfrac{\sigma^2}{1-a^2} a^{k-1}(a+b)(1+ab) & \text{für } k > 0 \\[2ex] \gamma_x(-k) & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

   Hinweis: Die Autokovarianzfunktion von (y_t) ist

   $$\gamma_y(k) = \mathrm{Cov}(y_{t+k}, y_t) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|k|}.$$

   Verwenden Sie dann wieder Punkt (a) und

   $$\gamma_x(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t) = \mathrm{Cov}(y_{t+k} + by_{t+k-1}, y_t + by_{t-1}).$$

   (d) Zeigen Sie, dass (x_t) ein white noise Prozess ist für $a + b = 0$ oder $ab = -1$.