Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2017S, 2.0h
24.November 2017
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Gegeben seien reelle Zahlen $0 < a < b < c < d$. Wir betrachten $X = W(d) - W(a)$ und $Y = W(c) - W(b)$. Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (X, Y).

   (b) Wir definieren den Prozess $(U(t), t \geq 0)$ durch

   $$U(t) = at + bt^2 + cW(t), \quad t \geq 0,$$

   wobei a, b, c reelle Zahlen sind. Ist U ein Gaußscher Prozess? Wenn ja, geben Sie seine Mittelwert- und Kovarianzfunktion an, wenn nein, eine kurze Begründung warum nicht.

   (c) Ist

   $$S = \int_0^\infty W(t) e^{-t} dW(t)$$

   wohldefiniert? Quadratisch integrierbar? Trifft beides zu berechnen Sie die Varianz von S und keine Begründung ist erforderlich, andernfalls geben Sie eine genaue Begründung.

   (d) Sei $Y(t) = f(W(t), t)$ für $t \geq 0$, wobei $f(x, t) = x^3 - t$ für $x \in \mathbb{R}$ ist. Wenden Sie die Ito-Formel an und schreiben Sie das Ergebnis in Differentialform '$dY(t) = \ldots$' an.

   (e) Finden Sie einen Prozess $(Z(t), t \geq 0)$ sodass $M = Y - Z$ ein Martingal ist. Hinweis: Die vorige Teilaufgabe könnte helfen.

Unverbindlicher Hinweis: Eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$ hat Erwarungswert $1/\lambda$. Das hat nichts mit dieser Aufgabe zu tun, oder doch?

2. Gegeben sei ein MA(1) Prozess $x_t = \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1}$, wobei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ weißes Rauschen mit Varianz $\sigma^2 > 0$ ist. Betrachten Sie nun den Prozess $(y_t = x_t + cx_{t-1})$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $c \neq 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass $y_t = d_0\epsilon_t + d_1\epsilon_{t-1} + d_2\epsilon_{t-2}$ und drücken Sie d_0, d_1 und d_2 als Funktion von c aus.

   (b) Zeigen Sie $d_0 = 1$ und $d_2 \neq 0$. ((y_t) ist also ein MA(2) Prozess.)

   (c) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma_y(k)$ von (y_t).

   (d) Bestimmen Sie nun c so, dass

      i. $d_1 = 0$ bzw.

      ii. $\gamma_y(1) = 0$ gilt.

3. (a) Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, \ldots, 4\}$, Anfangsverteilung δ_1, und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist die Kette irreduzibel? Begründen Sie dazu genau welche Zustände kommunizieren und welche nicht!

(b) (Fortsetzung) Bestimmen Sie die erwarteten Trefferzeiten $(k_i^A, i \in I)$ für $A = \{3, 4\}$!

(c) (Fortsetzung) Welche Bedeutung hat die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)}$? Für welche $i \in I$ konvergiert die Reihe? (Bitte dazu möglichst wenig Rechnen!)

(d) Sei $\theta \in (0, 1)$ und $(X_n)_{n\geq}$ nun eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathbb{Z}$, Anfangsverteilung δ_0, und Übergangsmatrix P mit

$$p_{i,i+1} = \theta, \quad p_{i,i-1} = 1 - \theta, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Die übrigen Einträge der Matrix sind 0. Wir setzen $Y_n = X_{2n}$ für $n \geq 0$. Dann ist $(Y_n)_{n\geq 0}$ auch eine Markovkette[1] mit Zustandsraum $J = 2\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix.

(e) Geben Sie ein konkretes und vollständig spezifiziertes Beispiel einer Stoppzeit T einer Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit drei Zuständen an, die $0 < P[T = \infty] < 1$ erfüllt.

[1] Das müssen und sollen Sie hier nicht beweisen!

4. In dieser Aufgabe betrachten wir einen Prozess $(x_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ der Form

$$x_t = \begin{cases} A & \text{für } t \text{ gerade} \\ B & \text{für } t \text{ ungerade} \end{cases}$$

wobei A und B zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariable sind mit $\mathbf{E}A = \mu_A$, $\mathbf{E}B = \mu_B$, $\mathbf{Var}(A) = \sigma_A^2$, $\mathbf{Var}(B) = \sigma_B^2$ und $\mathbf{Cov}(A, B) = \sigma_{AB}$.

(a) Skizzieren Sie eine "typische" Trajektorie von (x_t).

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbf{E}x_t$ und die Kovarianzen $\mathbf{Cov}(x_t, x_s)$.
Hinweis: machen Sie eine Fallunterscheidung

i. t und s sind gerade,

ii. t und s sind ungerade,

iii. $(t - 1)$ und s sind gerade und

iv. t und $(s - 1)$ sind gerade.

(c) Welche Bedingungen an A und B muss man stellen, damit der Prozess (x_t) stationär ist?

(d) Geben Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathbf{Cov}(x_k, x_0)$ für den stationären Fall an.

(e) Berechnen Sie die 1-Schritt Prognose aus zwei vergangenen Werten $\hat{x}_{t+1} = c_1 x_t + c_2 x_{t-1}$ und die entsprechende Fehlervarianz $\sigma_{1,2}^2 = \mathbf{E}(x_{t+1} - \hat{x}_{t+1})^2$.
Hinweis: Die Prognose und die entprechende Fehlervarianz kann man "sofort hinschreiben", ohne etwas zu rechnen.