Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse

Vorlesung, 2017S, 2.0h

13.Oktober 2017

Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Aus einer Zeitreihe der Länge $T = 100$ wurden folgende Autokovarianzen geschätzt: $\hat{\gamma}(0) = 2.5$, $\hat{\gamma}(1) = 2.0$, $\hat{\gamma}(2) = 1.6$ und $\hat{\gamma}(3) = 1.28$. Schätzen Sie mit Hilfe der Yule Walker Gleichungen

   (a) ein AR(1) Modell $x_t = ax_{t-1} + \epsilon_t$ (d.h. berechnen Sie Schätzer $\hat{a}$ für a und $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz $\sigma^2 = \mathbf{E}\epsilon_t^2$)

   (b) ein AR(2) Modell $x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \epsilon_t$ (d.h. berechnen Sie Schätzer $\hat{a}_1$ für a_1, $\hat{a}_2$ für a_2 und $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz $\sigma^2 = \mathbf{E}\epsilon_t^2$).

   (c) Welches der beiden Modelle würden Sie bevorzugen?

   Bemerkung: Die Zahlen sind nicht realistisch. Sie sind so gewählt, dass die Rechnungen möglichst einfach werden.

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Es sei
   $$X = W(3) - W(1), \quad Y = W(5) - W(3), \quad Z = W(5).$$
   Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (X, Y, Z).

   (b) Wir definieren den Prozess $(U(t), t \geq 0)$ durch
   $$U(t) = 1 + 2t - 3W(t), \quad t \geq 0.$$
   Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) der Verteilung der Zufallsvariablen $U(4)$.

   (c) Sei $\xi(t) = \exp(5U(t))$ für $t \geq 0$ und U der Prozess aus Aufgabe (b). Zeigen Sie, dass $(\xi(t), t \geq 0)$ ein Ito-Prozess ist, indem Sie explizit eine Darstellung
   $$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s) \quad a.s.$$
   für alle $t > 0$ angeben, und zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $\xi(0)$ und die Prozesse $(a(t), t \geq 0)$ und $(b(t), t \geq 0)$ die erforderlichen Eigenschaften haben.

   (d) Gegeben seien die reellen Zahlen $0 < u < v$ und
   $$\varphi(t) = W(u)I_{[u,v)}(t), \quad \psi(t) = W(v)I_{[u,v)}(t), \quad t \geq 0.$$
   Liegen φ und ψ in M^2_{step}, M^2, M^2_T mit $T > 0$? ? (Kurze Begründung!)

   (e) Gegeben seien die reellen Zahlen $0 < a < b < c$ und
   $$f(t) = W(a)I_{[a,b)}(t), \quad g(t) = W(t)I_{[b,c)}(t), \quad t \geq 0.$$
   Berechnen Sie die Kovarianz der stochastischen Integrale $I(f)$ und $I(g)$ mit einer Methode ihrer Wahl.

3. Und nun zu den Aufgaben mit Markovketten.

   (a) Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, \ldots, 4\}$, Anfangsverteilung δ_1, und Übergangsmatrix

   $$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen.

   (b) Welche Klassen der vorigen Aufgabe sind rekurrent, welche transient?

   (c) Bestimmen Sie die erwarteten Trefferzeiten $(k_i^A, i \in I)$ für $A = \{2, 3\}$ und die Kette aus Aufgabe (a).

   (d) Sei $(X_n)_{n\geq}$ eine Markovkette mit Zustandsraum I, Anfangsverteilung λ, und Übergangsmatrix P. Wir setzen

   $$Y_n = X_{2n}, \quad Z_n = X_{2n+1}, \quad n \geq 0.$$

   Dann sind $(Y_n)_{n\geq 0}$ und $(Z_n)_{n\geq 0}$ auch Markovketten[1] mit Zustandsraum I. Wir bezeichnen die Anfangsverteilungen von Y und Z mit μ und ν und die entsprechenden Übergangsmatrizen mit Q und R, also kurz

   $$X \sim \text{Markov}(\lambda, P), \quad Y \sim \text{Markov}(\mu, Q), \quad Z \sim \text{Markov}(\nu, R).$$

   Drücken Sie μ und ν sowie Q und R mithilfe von λ und P aus.

   (e) Gegeben sei eine irreduzible Markovkette mit zwei Zuständen. Berechnen Sie die erwartete Trefferzeit für den zweiten Zustand, wenn Sie (also eigentlich die Kette) im ersten Zustand starten. Wählen Sie selbst geeignete Bezeichnungen und dokumentieren Sie dies auch deutlich!

[1] Das müssen und sollen Sie hier nicht beweisen!

4. Gegeben ist ein Prozess (x_t) der Form:

$$x_t = u + \epsilon_t, \;\; t \in \mathbb{Z}$$

wobei u eine Zufalls-Variable mit $\mathbf{E}u = 0$ und $\mathbf{E}u^2 = \sigma_u^2$ ist und $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma_\epsilon^2)$ ein weißes Rauschen ist. Die Zufalls-Variable u ist unkorreliert zum Prozess (ϵ_t), d.h. $\mathbf{E}u\epsilon_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{Z}$.

   (a) Berechnen Sie $\mathbf{E}x_t$ und die Kovarianzen $\mathbf{Cov}(x_t, x_s)$

   (b) Ist der Prozess stationär?

   (c) Wenn ja, dann geben Sie bitte die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathbf{Cov}(x_k, x_0)$ an.

   (d) Berechnen Sie die 1-Schritt Prognose aus zwei vergangenen Werten $\hat{x}_{t+1,2} = c_1 x_t + c_2 x_{t-1}$.

   (e) Zeigen Sie, dass

   $$\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{T\to\infty} \frac{1}{T}(x_1 + \cdots + x_T) = u,$$

   wobei l. i. m. wie üblich für den Grenzwert bzgl. der Konvergenz im quadratischen Mittel steht.