Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2017S, 2.0h
30.Juni 2017
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben ist der AR(4) Prozess

$$x_t = 0.5x_{t-2} + \epsilon_t, \ \ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = 3/4)$$

   (a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung.

   (b) Berechnen Sie mit Hilfe der Yule-Walker Gleichungen die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) Berechnen Sie die h-Schrittprognose $\hat{x}_{t+h}$ aus $k \geq 2$ vergangenen Werten für $h > 0$: Zeigen Sie, dass

$$\hat{x}_{t+h} = \begin{cases} c^{(h)} x_{t-1} & \text{für } h \text{ ungerade} \\ c^{(h)} x_t & \text{für } h \text{ gerade} \end{cases}$$

   und geben Sie eine Formel für die Koeffizienten $c^{(h)}$.

   (d) Beweisen Sie folgende Rekursionsformel für die entsprechenden Prognosefehler:

$$\hat{u}_{t+h} = x_{t+h} - \hat{x}_{t+h} = \begin{cases} \epsilon_{t+1} & \text{für } h = 1 \\ \epsilon_{t+2} & \text{für } h = 2 \\ \epsilon_{t+h} + 0.5\hat{u}_{t+h-2} & \text{für } h > 2 \end{cases}$$

   (e) Beweisen Sie nun mit Hilfe der obigen Rekursionsformel für die Prognosefehler folgende Formel für die Varianz der Prognosefehler:

$$\sigma_h^2 = \mathbf{E}(\hat{u}_{t+h}^2) = \begin{cases} \frac{3}{4}\sum_{j=0}^{(h-1)/2} 0.5^j & \text{für } h \text{ ungerade} \\ \frac{3}{4}\sum_{j=0}^{(h-2)/2} 0.5^j & \text{für } h \text{ gerade} \end{cases}$$

2. Gegeben ist der MA(1) Prozess

$$x_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}, \ \ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = 1)$$

   Beachten Sie, dass (x_t) auch ein ARMA(0,1) Prozess ist.

   (a) Erfüllt das obige ARMA(0,1) System die Minimum-Phase bzw. die strikte Minimum-Phase Bedingung?

   (b) Wir betrachten jetzt den Prozess

$$(y_t^{(m)} = \frac{1}{m}(x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \cdots + x_{t+1-m}))$$

   für ein $m \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(y_t^{(m)})$ ein MA(m) Prozess ist. Hinweis: Finden Sie eine Darstellung $y_t^{(m)} = b_0\epsilon_t + \cdots + b_m\epsilon_{t-m}$ für $y_t^{(m)}$.

   (c) Berechnen Sie bitte Erwartungswert und Autokovarianzfunktion der Prozesse (x_t) und $(y_t^{(m)})$.

   (d) Zeigen Sie, dass die Einschrittprognose $\hat{y}_{t+1}^{(m)}$ für $y_{t+1}^{(m)}$ aus k vergangenen Werten für alle $k < m$ gleich Null ist

   (e) Wir halten nun t fest und lassen m gegen unendlich gehen. Zeigen Sie:

$$\mathrm{l.i.m.}_{m\to\infty} y_t^{(m)} = 0.$$

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Es sei
   $$X = W(3) - W(1), Y = W(5) - W(2), Z = W(7) - W(4).$$
   Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (X, Y, Z).

   (b) Gegeben seien reelle Zahlen $x > 0$, $c > 0$ und $\sigma > 0$. Wir definieren den Prozess $(U(t), t \geq 0)$ durch
   $$U(t) = x + ct - \sigma W(t), \quad t \geq 0.$$
   Sei $T_1 > 0$ eine reelle Zahl. Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) der Verteilung der Zufallsvariablen $U(T_1)$.

   (c) Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) der endlichdimensionalen Verteilungen[1] des Prozesses $(U(t), t \geq 0)$. Ist $(U(t), t \geq 0)$ ein Gaußscher Prozess? (Kurze Begründung!)

   (d) Gegeben seien die reellen Zahlen $0 < a < b$ und
   $$f(t) = W(a) I_{[a,b)}(t), \quad g(t) = W(t) I_{[a,b)}(t), \quad t \geq 0.$$
   Berechnen Sie die Kovarianz der stochastischen Integrale $I(f)$ und $I(g)$ mit einer Methode ihrer Wahl.

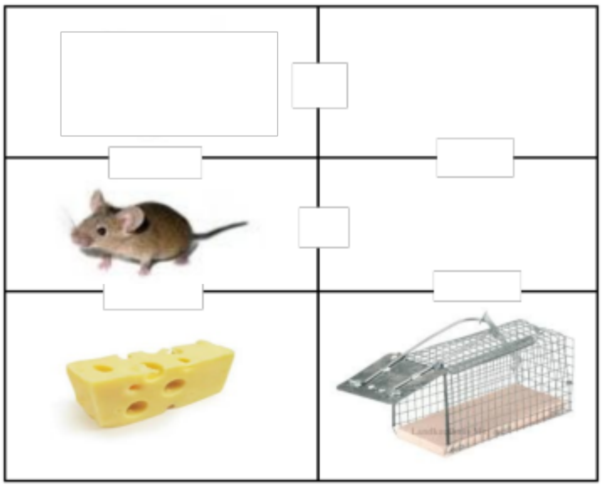
   (e) Der Volatilitätsprozess $(V(t), t \geq 0)$ im sogenannten 3/2-Modell ist ein strikt positiver Ito-Prozess mit
   $$dV(t) = \kappa V(t)(\theta - V(t))dt + \sigma V(t)^{3/2} dW(t).$$
   Dabei sind κ, θ, und σ geeignet gewählte reelle Parameter. Sei nun $Y(t) = 1/V(t)$ für $t \geq 0$. Dann ist auch $(Y(t), t \geq 0)$ ein strikt positiver Ito-Prozess und es gilt
   $$dY(t) = k(h - Y(t))dt + w\sqrt{Y(t)}dW(t),$$
   wobei die Parameter k, h, und w aus κ, θ, und σ ausgerechnet werden können.[2] Tun Sie das![3]

[1] Wie Sie gelernt habe, handelt es sich dabei um die Verteilung der Zufallsvektoren $(U(t_1), \ldots, U(t_n))$ für $n \geq 1$ und $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$.

[2] Hinweis: Dass alle Voraussetzungen zur Anwendbarkeit der Ito-Formel erfüllt sind dürfen und sollen sie als gegeben voraussetzen! Sie müssen und sollen das nicht selbst untersuchen!

[3] Der Prozess $(Y(t), t \geq 0$ ist übrigens ein Fellerscher Wurzelprozess, der z.B. im Zinsmodell von Cox, Ingersoll und Ross sowie im bekannten Volatilitätsmodell von Heston verwendet wird. Das alles interessiert Sie wahrscheinlich gerade brennend :)

4. (a) Eine Maus läuft durch den unten abgebildeten 3x2-Irrgarten. In jedem Zeitschritt wechselt sie zufällig von einem Raum in einen Nachbarraum. In einem Raum ist eine Lebendfalle aufgestellt, in einem anderen liegt ein praktisch unbegrenzter Vorrat Käse. Betritt die Maus diese Räume, bleibt sie dort. Modellieren Sie die Situation mit einer Markovkette. Geben Sie Zustandsraum, Anfangsverteilung und Übergangsmatrix an. Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Maus gefangen wird bevor sie in den Käseraum gelangt.



(b) Ermitteln Sie die Kommunikationsklassen für die Markovkette aus Aufgabe (a). Welche Klassen sind rekurrent, welche transient? (Dazu ist kein detaillierter Beweis verlangt.)

(c) Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/20)$ und Übergangsmatrix[4]

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Weisen Sie genau rechnerisch[5] mit der Matrix P bzw. ihren Einträgen p_{ij} nach, dass die Kette irreduzibel ist.

(d) Bestimmen Sie für die Kette aus Aufgabe (c) die erwarteteten Trefferzeiten der Menge $A = \{1, 5\}$.

(e) Gegeben Sie eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/6, 1/3, 1/2)$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Drücken Sie damit die folgenden Wahrscheinlchkeiten aus:

i. $\mathbb{P}[X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 3] =?$

ii. $\mathbb{P}[X_2 = 2 | X_1 = 1, X_0 = 3] =?$

[4] In der ersten und letzten Zeile der Matrix stehen **Drittel** !!

[5] Also nicht die Definition von irreduzibel in Worten wiederholen!