Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2016S, 2.0h
27.Februar 2017
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) die gemeinsame Verteilung von $(W(5) - W(2), W(11) - W(5))$.

   (b) Beschreiben Sie möglichst genau (Name und Parameter) die gemeinsame Verteilung von $(W(11) - W(3), W(5) - W(2))$.

   (c) Es sei
   $$f(t) = W(t)I_{[2,5)}(t), \quad g(t) = W(t)I_{[3,7)}(t), \quad t \geq 0.$$
   Berechnen Sie $\mathrm{Cov}[\int_0^\infty f(t)dW(t), \int_0^\infty g(t)dW(t)]$.

   (d) Angenommen $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ und ein Ito-Prozess X erfüllt
   $$X(t) = \alpha t + \sigma W(t), \quad t \geq 0.$$
   Weiters definieren wir einen Prozess Y durch $Y(t) = \exp(X(t))$ für $t \geq 0$. Zeigen Sie dann mit der allgemeinen Ito-Formel, dass Y auch ein Ito-Prozess ist bestimmen Sie die Darstellung
   $$Y(t) = Y(0) + \int_0^t A(s)ds + \int_0^t B(s)dW(s).$$
   (Nur das Ergebnis, die erforderlichen Eigenschaften von A und B müssen Sie nicht zeigen!)

   (e) Angenommen $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ und ein Ito-Prozess S erfüllt $S(0) = 1$ und
   $$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad t > 0.$$
   Dann kann man zeigen $P[S(t) > 0] = 1$ für alle $t \geq 0$. Weiters definieren wir einen Prozess Z durch $Z(t) = \log(S(t))$ für[1] $t \geq 0$. Zeigen Sie dann mit der allgemeinen Ito-Formel, dass Z auch ein Ito-Prozess ist bestimmen Sie die Darstellung
   $$dZ(t) = U(t)dt + V(t)dW(t), \quad t > 0.$$
   (Nur das Ergebnis, die erforderlichen Eigenschaften von U und V müssen Sie nicht zeigen!)

2. Gegeben sei ein stationärer Prozess (x_t), der die Differenzengleichung
   $$x_t = c + ax_{t-1} + \epsilon_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$
   erfüllt, wobei $c, a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$ und $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ ein white noise Prozess ist. Zeigen Sie:

   (a) $\mu := \mathbf{E}x_t = \frac{c}{1-a}$.

   (b) Der zentrierte Prozess $(\tilde{x}_t = x_t - \mu)$ ist ein AR(1) Prozess.

   (c) Berechnen Sie die h-Schrittprognose $\hat{x}_{t+h}$.

   (d) Geben Sie eine Darstellung des entsprechenden Prognosefehlers (d.h. stellen Sie $(\hat{u}_{t+h} = x_{t+h} - \hat{x}_{t+h})$ durch eine Linearkombination von $\epsilon_{t+h}, \epsilon_{t+h-1}, \ldots, \epsilon_{t+1}$ dar.)

   (e) Beweisen Sie folgende Formel für die Varianz des h-Schrittprognosefehlers:
   $$\sigma_h^2 = \mathbf{E}\hat{u}_{t+h}^2 = \sigma^2 \frac{1 - a^{2h}}{1 - a^2}.$$

[1] Hier bezeichnet 'log' den natürlichen Logartihmus.

3. Gegeben Sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,2,3,4\}$, Anfangsverteilung λ und Übergangsmatrix P, wobei

$$\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_3 = 4 | X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1]$ und $\mathbb{P}[X_0 = 1 | X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 4]$.

   (b) Es gilt

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & ? & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & ? & ? & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

   Ergänzen Sie die fehlenden Einträge $p_{22}^{(2)}$, $p_{42}^{(3)}$ und $p_{43}^{(3)}$.

   (c) Bestimmen Sie $\mathbb{P}[X_6 = 2 | X_1 = 4]$!

   (d) Ist die Kette irreduzibel? (Genaue, konkrete Begründung, nicht die Definition von 'irreduzibel' abschreiben!)

   (e) Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n > 2\}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}_i[T]$ für alle $i \in I$.

4. $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ sei ein white noise Prozess mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = \sigma^2 = 1$. Betrachten Sie folgende Differenzengleichungen:

   (a) $x_t = x_{t-1}$

   (b) $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$

   (c) $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$

   (d) $x_t = 0.9 x_{t-2}$

   (e) $x_t = 0.9 x_{t-2} + \epsilon_t$

   Existiert eine stationäre Lösung (y_t) und wenn ja, ist diese eindeutig? Hinweis zu (c): Betrachten Sie den Prozess $(\tilde{x}_t = c + \epsilon_t)$, $c \in \mathbb{R}$.