Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2016S, 2.0h
14.Oktober 2016
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Betrachten Sie den Prozess

$$(x_t = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t) \,|\, t \in \mathbb{Z}),$$

wobei $0 < \lambda < \pi$ und A, B zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariable mit $\mathbf{E}A = \mathbf{E}B = 0$, $\mathbf{E}[AB] = 0$ und $\mathbf{E}A^2 = \mathbf{E}B^2 = 1$ sind.

   (a) Berechnen Sie $\mathbf{E}x_t$ und $\mathbf{E}x_t x_s$ für alle $t, s \in \mathbb{Z}$. Hinweis: $\cos(\theta)\cos(\mu) + \sin(\theta)\sin(\mu) = \cos(\theta - \mu)$.

   (b) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) stationär ist und berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$.

   (c) Nehmen Sie nun an, dass $\lambda = 2\pi r$, wobei r eine rationale Zahl ist. Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) dann periodisch ist, d.h. es existiert ein $T \in \mathbb{N}$, sodass $x_{t+T} = x_t$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ gilt.

   (d) Geben Sie für diesen Fall ($\lambda = 2\pi r$, $r \in \mathbb{Q}$) auch die h-Schrittprognose $\hat{x}_{t+h}$ aus der unendlichen Vergangenheit an und zeigen Sie, dass der Prozess perfekt prognostizierbar ist, dass also $\hat{x}_{t+h} = x_{t+h}$ für alle $h > 0$ gilt. (Bemerkung: Der Prozess ist für beliebige $0 < \lambda < \pi$ perfekt prognostizierbar. Für den Fall ($\lambda = 2\pi r$, $r \in \mathbb{Q}$) ist das aber besonders einfach zu zeigen.)

2. Gegeben ist folgender ARMA(2,2) Prozess

$$x_t = 0.25x_{t-2} + \epsilon_t + 0.25\epsilon_{t-2}, \quad (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = 1)$$

   (a) Überprüfen Sie die Stabilitäts-, die (strikte) Minimum-Phase Annahme und die "Koprimheits-Annahme".

   (b) Berechnen sie die 1-Schritt, 2-Schritt und die 3-Schritt Prognose aus der unendlichen Vergangenheit. Es genügt, wenn Sie die Prognose(n) als Funktion von x_t, x_{t-1}, $\cdots$ und ϵ_t, ϵ_{t-1}, $\cdots$ ausdrücken und die Prognosefehler als Funktion von ϵ_{t+1}, ϵ_{t+2}, $\cdots$. Berechnen Sie auch die entsprechenden Prognosefehler-Varianzen.

3. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Es sei
   $$A = W(s) - W(r), \quad B = W(t),$$
   wobei $0 < r < s < t$ gegebene, feste reelle Zahlen sein sollen. Berechnen Sie $\mathbf{E}[AB]$.

   (b) Beschreiben Sie die gemeinsame Verteilung von (A, B) möglichst präzise.

   (c) Bergründen Sie sorgfältig und detailliert, warum
   $$f(t) = (W(2) - W(1))1_{[2,3)}(t) + (W(3) - W(1))I_{[3,5)}(t), \quad t \geq 0,$$
   ein Prozess aus M^2_{step} ist.

   (d) Berechnen Sie
   $$E\left[\left(\int_0^\infty f(t)dW(t)\right)^2\right]$$
   mit einer Methode Ihrer Wahl.

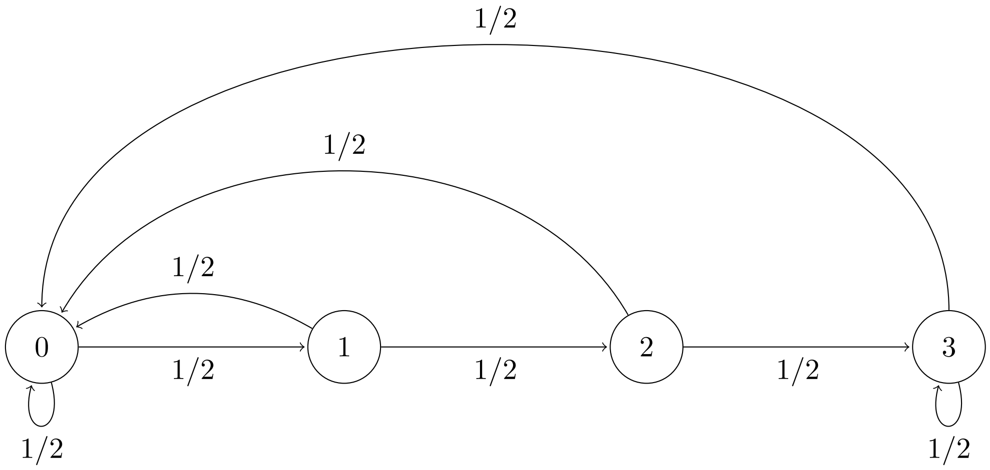
   (e) Angenommen ein Ito-Prozess ξ besitzt die Darstellung
   $$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s)$$

Zeigen Sie dann mit der allgemeinen Ito-Formel, dass $\Xi(t) = 1 + \xi(t) - 2\xi(t)^2$ auch ein Ito-Prozess ist bestimmen Sie die Darstellung

$$\Xi(t) = \Xi(0) + \int_0^t A(s)ds + \int_0^t B(s)dW(s).$$

(Nur das Ergebnis, die erforderlichen Eigenschaften von A und B müssen Sie nicht zeigen!)

4. Gegeben Sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{0, 1, 2, 3\}$, Anfangsverteilung δ_3, und Übergangswahrscheinlichkeiten die in folgendem Graphen dargestellt sind.



(a) Geben Sie die Übergangsmatrix P an.

(b) Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[T < \infty]$.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}_2[T]$.

(d) Ist die Kette irreduzibel? Wenn ja, begründen Sie genau, wie alle Zustände kommunizieren, wenn nein, geben Sie die Kommunikationsklassen der Kette an.

(e) Berechnen Sie die Verteilung von T, als $P[T = n]$ für alle $n \geq 0$.