Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2016S, 2.0h
30.Juni 2016
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben sei ein schwach stationärer Prozess $(u_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ mit $\mathbf{E}u_t = 0$ und Autokovarianzfunktion $\gamma_u(k) = \mathbf{E}u_{t+k}u_t$. Wir betrachten nun die Prozesse $(x_t = d_0 + d_1 t + u_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ und $(y_t = x_t - x_{t-1} \,|\, t \in \mathbb{Z})$, wobei $(d_0, d_1 \in \mathbb{R})$.

   (a) Berechnen Sie $\mathbf{E}x_t$ und $\mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$. (Drücken Sie diese Größen durch die ACF γ_u und die Parameter d_0 und d_1 aus.)

   (b) Ist der Prozess (x_t) schwach stationär? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

   (c) Berechnen Sie $\mathbf{E}y_t$ und $\mathbf{Cov}(y_{t+k}, y_t)$. (Drücken Sie diese Größen durch die ACF γ_u und die Parameter d_0 und d_1 aus.)

   (d) Ist der Prozess (y_t) schwach stationär? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

   (e) Berechnen Sie die h-Schritt Prognose für x_{t+h} aus einem vergangenem Wert $(k = 1)$ und geben Sie auch die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers an. (Hinweis: verwenden Sie die h-Schritt Prognose für u_{t+h}.)

2. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Es sei $T > 0$ eine feste Zahl. Weiters sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(f(t), t \geq 0)$ ein stochastischer Prozess mit $f(t) = e^{\alpha t}, \quad t \geq 0$. Für welche α gilt $f \in M^2$? Für welche gilt $f \in M_T^2$? (Genaue Begründung!)

   (b) (Fortsetzung) Berechen Sie den Erwartungswert und die **Standardabweichung** von

   $$I_T(f) = \int_0^T f(t)dW(t)$$

   für $\alpha = \ln 2$ und $T = \sqrt{13}$ mit einer Methode Ihrer Wahl. Runden Sie Ihre Ergebnisse zur nächstgelegenen ganzen Zahl!

   (c) Gegeben sei die Funktion $g(t, x) = t^3 e^{-x}$ und der Prozess $Y(t) = g(t, W(t))$. Wenden Sie die Ito-Formel an um eine Darstellung von $(Y(t), t \geq 0)$ als Ito-Prozess zu finden. Geben Sie das Ergebnis in Differentialschreibweise an.[1]

   (d) Gegeben sei die Funktion $h(t, x) = x^3 e^{-t}$ und der Prozess $(V(t), t \geq 0)$ mit

   $$V(t) = v + \kappa \int_0^t (\theta - V(s))ds + \xi \int_0^t \sqrt{V(s)}dW(s),$$

   wobei $v > 0, \kappa > 0, \theta > 0, 0 < \xi < \sqrt{2\kappa\theta}$ Parameter sind.[2] Sei $S(t) = h(t, V(t)$ für $t \geq 0$. Wenden Sie die Ito-Formel an um eine Darstellung von $(S(t), t \geq 0)$ als Ito-Prozess zu finden. Geben Sie das Ergebnis in Integralschreibweise an.[3]

   (e) Zeigen Sie sorgfältig und genau: Es gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-t}dW(t) = \int_0^\infty e^{-t}dW(t)$$

   in L^2.

[1] Integraldarstellung ergibt Punkteabzug!

[2] Das ist der Fellerscher Wurzelprozess, der im Zinsmodell von Cox, Ingersoll und Ross (CIR) verwendet wird. Die 'Feller condition' $\xi^2 < 2\kappa\theta$ garantiert, dass $V(t) > 0$ f.s. gilt.

[3] Differentialdarstellung ergibt Punkteabzug!

3. Gegeben sei ein white noise Prozess $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma_\epsilon^2)$ und eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable z mit $\mathbf{E}z = \mu$, $\mathbf{Var}(z) = \sigma_z^2$ und $\mathbf{Cov}(\epsilon_t, z) = 0\ \forall t \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten nun den Prozess $(x_t = z + \epsilon_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) schwach stationär ist und berechnen Sie $\mathbf{E}x_t$ und die Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$.

   (b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{t-j} \right) = z.$$

   Hinweis: Berechnen Sie $\mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_{t-j}\right)^2\right]$.

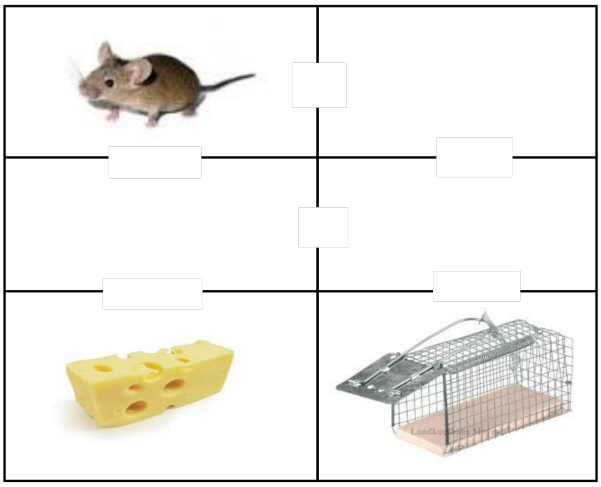
   (c) Aus Punkt (b) folgt, dass $z \in \mathbb{H}_x(t) = \overline{\mathrm{sp}}\{x_s \,|\, s \le t\}$. Zeigen Sie nun, dass die h-Schrittprognose $\hat{x}_{t+h}$ für x_{t+h} aus der unendlichen Vergangenheit gegeben ist durch:

$$\hat{x}_{t+h} = z$$

   (d) Geben Sie die Varianz σ_h^2 des h-Schrittprognosefehlers aus der unendlichen Vergangenheit an.

   (e) Ist der Prozess (x_t) regulär? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

4. (a) Eine Maus läuft durch den unten abgebildeten 3x2-Irrgarten. In jedem Zeitschritt wechselt sie zufällig von einem Raum in einen Nachbarraum. In einem Raum ist eine Lebendfalle aufgestellt, in einem anderen liegt ein praktisch unbegrenzter Vorrat Käse. Betritt die Maus diese Räume, bleibt sie dort. Modellieren Sie die Situation mit einer Markovkette. Geben Sie Zustandsraum, Anfangsverteilung und Übergangsmatrix an. Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Maus gefangen wird bevor sie in den Käseraum gelangt.



   (b) Ermitteln Sie die Kommunikationsklassen für die Markovkette aus Aufgabe (a). Welche Klassen sind rekurrent, welche transient? (Dazu ist kein detaillierter Beweis verlangt.)

   (c) Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/20)$ und Übergangsmatrix[4]

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

[4] In der letzten Zeile der Matrix stehen **Drittel** !!

Weisen Sie genau rechnerisch[5] mit der Matrix P bzw. ihren Einträgen p_{ij} nach, dass die Kette irreduzibel ist.

(d) Bestimmen Sie für die Kette aus Aufgabe (c) die erwarteteten Trefferzeiten der Menge $A = \{3, 4\}$.

(e) Gegeben Sie eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/6, 1/3, 1/2)$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Drücken Sie damit die folgenden Wahrscheinlchkeiten aus:

i. $\mathbb{P}[X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 3] =?$

ii. $\mathbb{P}[X_2 = 2 | X_1 = 1, X_0 = 3] =?$

[5] Also nicht die Definition von irreduzibel in Worten wiederholen!