Name:

Mat.Nr.: Studium:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2015S, 2.0h
29.Februar 2016
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Betrachten Sie den Prozess

$$(x_t = \cos(\lambda t + \phi) \,|\, t \in \mathbb{Z}),$$

wobei $\phi \in [-\pi, \pi]$ eine reelle Zahl ist und $\lambda \sim U([-\pi, \pi])$ eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist.

   (a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mu_x(t) = \mathbb{E}x_t$ $(\forall t \in \mathbb{Z})$.

   (b) Berechnen Sie die Kovarianzen $\mathbf{Cov}(x_t, x_s)$ $(\forall t, s \in \mathbb{Z})$.

   (c) Ist der Prozess (x_t) schwach stationär?

Hinweis: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

2. Betrachten Sie den AR(2) Prozess: $x_t = 0.5x_{t-2} + \epsilon_t$, wobei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ und $\sigma^2 = 1$.

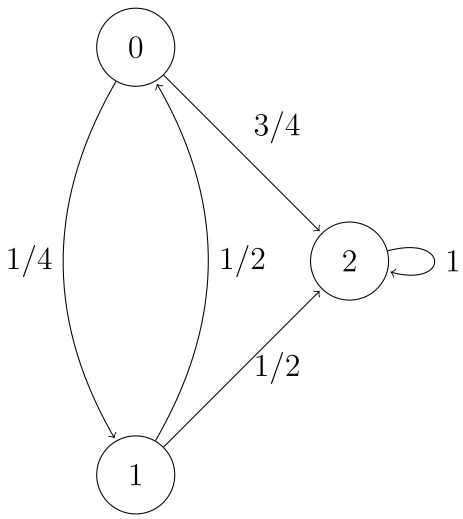
   (a) Zeigen Sie zunächst, dass die Stabilitätsbedingung erfüllt.

   (b) Berechnen Sie die h Schrittprognosen $\hat{x}_{t+h} = c_1^{(h)} x_t + c_2^{(h)} x_{t-1}$ für $h = 1, 2, 3, 4$.

   (c) Berechnen Sie auch die entsprechenden Prognosefehler-Varianzen $\sigma_h^2 = \mathbb{E}(x_{t+h} - \hat{x}_{t+h})^2$.

   (d) Wieso genügt es, nur x_t und x_{t-1} für die Prognose(n) zu verwenden?

3. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$ mit Zustandsraum $S = \{0, 1, 2\}$, Anfangsverteilung $\lambda_0 = 1/3$, $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 1/3$ und einer Übergangsmatrix P, die durch folgendes Diagramm dargestellt wird.



   (a) Geben sie P als reelle 3×3-Matrix an und berechnen Sie die unbedingte Verteilung von X_2, also $\mathbb{P}[X_2 = i]$ für $i = 0, 1, 2$.

   (b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}_i[X_2 = 2]$ für $i = 0, 1, 2$.

   (c) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen. Geben Sie an ob die Klassen rekurrent oder transient sind. Ist die Kette irreduzibel?

   (d) Sei $H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 2\}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}_i(H)$ für $i = 0, 1, 2$. Hinweis: Das $\mathbb{E}$ steht wie immer für Erwartungswert und nicht Wahrscheinlichkeit!

   (e) Für $n \geq 0$ sei $Y_n = \min(X_0, \ldots, X_n)$ und $Z_n = (X_n, Y_n)$. Ist $(Z_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette? Ist ihre Antwort ja, müssen Sie nichts beweisen, aber einen geeigneten Zustandsraum und die Anfangsverteilung angeben sowie die Übergangsmatrix von $(Z_n)_{n \geq 0}$ in einem Diagramm skzzieren. Ist ihre Antwort nein, müssen Sie sorgfältig begründen oder beweisen, warum nicht.

4. Auch heute sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiter sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Sei
   $$f(t) = W(1) I_{[1,2)}(t) + W(2) I_{[3,5)}(t), \quad t \geq 0.$$
   Zeigen Sie sorgfältig und detailliert, dass $f \in M^2_{\text{step}}$. Hinweis zur Erinnerung: Sie brauchen eine geeignete Darstellung, Messbarkeits- und Integrierbarkeitseigenschaften!

   (b) Werten Sie $I(f)$ gemäß der Definition des stochastischen Integrals für M^2_{step}-Funktionen aus.

   (c) Bestimmen Sie $E[I(f)]$ und $E[I(f)^2]$ mit einer Methode Ihrere Wahl.

   (d) Bestimmen Sie $E[I(f)|\mathcal{F}(t)]$ für $t \in (1, 2)$ und für $t = 4$.

   (e) Sei nun
   $$Y(t) = \sin(t) + \cos(W(t)), \quad t \geq 0.$$
   Bestimmen Sie das „stochastische Differential" $dY(t)$ mit der Ito-Formel.[1]

[1] Hinweis: $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Und wenn das Differential gefragt ist, bekommen Sie für die Integraldarstellung NICHT die volle Punktezahl, auch wenn die stimmt.