Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2015S, 2.0h
Dezember 2015
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, \dots, 6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ und einer Übergangsmatrix P, die in untenstehender Abbildung als Übergangsgraph dargestellt ist. Sei[1]

$$H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 3\}, \qquad T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 3\}.$$

(Notation wie in Buch und Vorlesung.)

   (a) Ist die Kette irreduzibel? (Begründung, Aufschreiben der Definition von 'irreduzibel' allein reicht nicht.)

   (b) Finden Sie eine Zahl $\alpha > 0$ sodass $\mathbb{P}_2[T = \infty] \geq \alpha$ gilt. (Mit kurzer Begründung bzw. Herleitung)

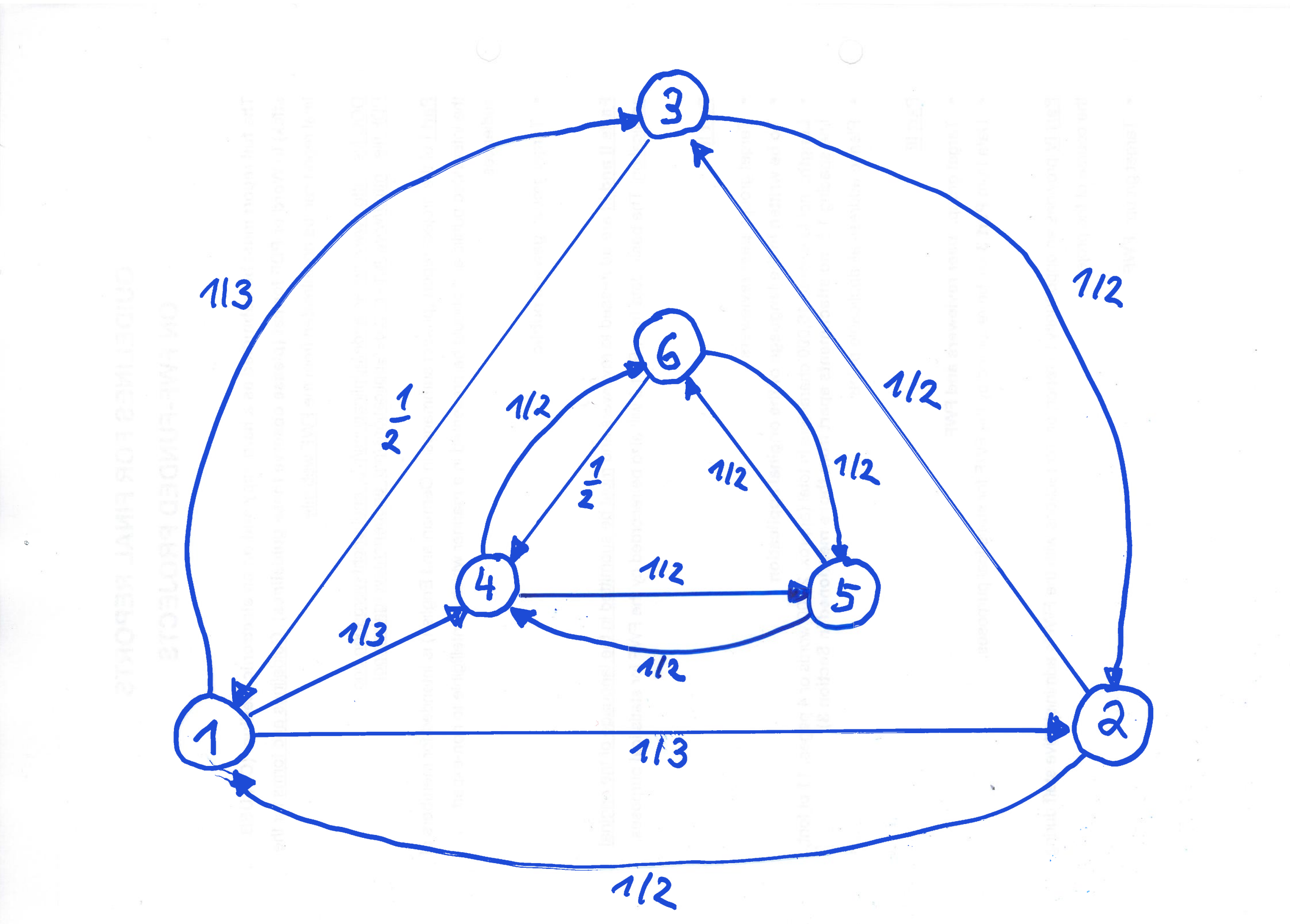
   (c) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_4 = 3 | X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3]$.

   (d) Berechnen Sie $\mathbb{P}_i[H < \infty]$ für alle $i \in I$.

   (e) Für welche $i \in I$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

   endlich, für welche $i \in I$ ergibt die Reihe Unendlich? Was sagen diese Ergebnisse über das Verhalten der Kette aus? (Kurze Antwort in Worten.)



[1] Die Formel genau lesen!

2. In dieser Aufgabe geht es um einen AR(2) Prozess

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \epsilon_t$$

wobei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$. Gegeben sind die Autokovarianzen $\gamma(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$ für $k = 0, 1, 2$:

$$\gamma(0) = 1.9200,\ \gamma(1) = 1.2800 \text{ und } \gamma(2) = 1.1200.$$

   (a) Bestimmen Sie die Parameter $(a_1,\ a_2,\ \sigma^2)$ des AR Modells.

   (b) Berechnen Sie dann die Autokovarianzen $\gamma(k)$ für $k = 3$ und $k = 4$.

3. Auch heute sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiter sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Sei
   $$f(t) = \sqrt{2} I_{[1,2)}(t) + W(2) I_{[3,5)}(t), \quad t \geq 0.$$
   Zeigen Sie sorgfältig und detailliert, dass $f \in M^2_{\text{step}}$.

   (b) Werten Sie $I(f)$ gemäß der Definition des stochastischen Integrals für M^2_{step}-Funktionen aus.

   (c) Welche Verteilung (Name und Parameter) hat $f(4)$?

   (d) Bestimmen Sie $E[I_T(f)]$ und $\mathrm{Var}[I_T(f)]$ für alle $T \geq 0$ mit einer Methode Ihrere Wahl.

   (e) Sei nun
   $$Y(t) = \sin(t + W(t)), \quad t \geq 0.$$
   Bestimmen Sie das „stochastische Differential" $dY(t)$ mit der Ito-Formel.[2]

4. Betrachten Sie den Prozess

$$(x_t = z_0 + (-1)^t z_1 \,|\, t \in \mathbb{Z}),$$

wobei z_0, z_1 zwei quadratisch integrierbare, reelle Zufallsvariable mit $\mathbf{E}z_0 = \mathbf{E}z_1 = 0$, $\mathbf{E}[z_0 z_1] = 0$ und $\mathbf{E}z_0^2 = \sigma_0^2$, $\mathbf{E}z_1^2 = \sigma_1^2$ sind.

   (a) Zeigen Sie, dass dieser Prozess stationär ist und berechnen Sie den Erwartungswert $\mu_x = \mathbf{E}x_t$ und die Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$.

   (b) Zeigen Sie auch, dass z_1 und z_0 Linear-Kombinationen von x_t und x_{t-1} sind. Wieso impliziert das, dass der Prozess perfekt prognostizierbar ist, dass also $\hat{x}_{t+h} = x_{t+h}$ für alle $h > 0$ gilt?

[2]Hinweis: $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.