Name:

Mat.Nr.: Studium:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2015S, 2.0h
26. Juni 2015
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt, bitte alle Zwischenschritte angeben)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Weiters sei $X(t) = 1 + t - W(t)^2$, $t \geq 0$. Berechnen Sie $E[X(t)|\mathcal{F}(s)]$ für alle $0 \leq s \leq t$.

   (b) (Fortsetzung) Ermitteln Sie $dX(t)$ mit der Ito-Formel.

   (c) (Fortsetzung) Begründen Sie sorgfältig und detailliert anhand der Definition eines Martingals in stetiger Zeit, dass $(X(t), t \geq 0)$ ein Martingal ist.[1]

   (d) Sei nun $f(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$. Berechnen Sie $\|f\|_{M^2}$. Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

   (e) (Fortsetzung) Berechnen Sie

$$E\left[\left(\int_0^\infty f(t)dW(t)\right)^2\right].$$

   Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

[1]Für das Aufschreiben der Definition allein gibt es keine Punkte!

2. Gegeben ist ein stationärer Gaußprozess $(x_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ mit Erwartungswert $\mathbf{E}x_t = \mu_x$ und Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t)$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Prozess $(y_t = \exp(x_t) \,|\, t \in \mathbb{Z})$ (schwach) stationär ist und berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}y_t$ und die Autokovarianzfunktion $\gamma_y(k) = \mathrm{Cov}(y_{t+k}, y_t)$.

   (b) Ist der Prozess (y_t) auch strikt stationär?

   (c) Zeigen Sie, dass (y_t) ein MA(q) Prozess ist, wenn (x_t) ein MA(q) Prozess ist.

   Zur Erinnerung: "Gaußprozess" heißt, dass $(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ multivariat Normal verteilt sind für alle $t_i \in \mathbb{Z}$ und $n > 0$.

   Hinweise:

   - Für eine Normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt

   $$\mathbf{E}\exp(X) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$$

   - Welche Verteilungen haben die Zufallsvariablen x_t und $(x_{t+k} + x_t)$?

3. Gegeben sei ein AR(p) Prozess $x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \cdots + a_p x_{t-p} + \epsilon_t$, $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$. (Natürlich ist die Stabilitätsbedingung erfüllt.) Die h-Schrittprognose für x_{t+h} (aus der unendlichen Vergangenheit) bezeichnen wir wie üblich mit $\hat{x}_{t+h}$ und $\hat{u}_{t+h} = x_{t+h} - \hat{x}_{t+h}$ ist der entsprechende Prognosefehler. Wir betrachten nun den Prozess $(y_t \mid t \in \mathbb{N})$, der definiert ist durch

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_t &= c + y_{t-1} + x_t = ct + \sum_{j=1}^{t} x_j \text{ für } t > 0 \end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

(a) Als ein-Schrittprognose für y_{t+1} verwenden wir $\hat{y}_{t+1} = c + y_t + \hat{x}_{t+1}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} (y_{t+1} - \hat{y}_{t+1}) &= \hat{u}_{t+1} = \epsilon_{t+1} \\ \mathbf{E}(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1})^2 &= \sigma^2 \end{aligned}$$

(b) Als zwei-Schrittprognose für y_{t+2} verwenden wir $\hat{y}_{t+2} = 2c + y_t + \hat{x}_{t+1} + \hat{x}_{t+2}$. Zeigen Sie, dass

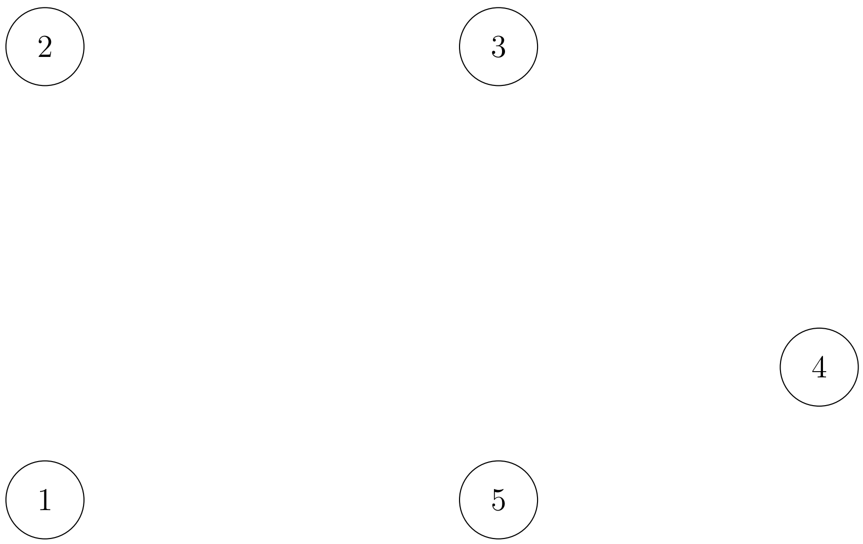
$$\begin{aligned} (y_{t+2} - \hat{y}_{t+2}) &= \hat{u}_{t+2} + \hat{u}_{t+1} = \epsilon_{t+2} + (a_1 + 1)\epsilon_{t+1} \\ \mathbf{E}(y_{t+2} - \hat{y}_{t+2})^2 &= \sigma^2(2 + 2a_1 + a_1^2) \end{aligned}$$

Hinweis: Sie müssen hier nicht zeigen, dass $\hat{y}_{t+1}$, $\hat{y}_{t+2}$ die optimalen Prognosen sind. Sie sollen nur die angegeben Formeln für die Prognosefehler und deren Varianz beweisen.

4. Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Anfangsverteilung δ_2 und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie die Markovkette als Graph dar. Tragen Sie dazu in die untenstehende Skizze die entsprechenden Übergänge (als Pfeile) mit ihren Übergangswahrscheinlichkeiten ein.



(b) Welche Zustände sind absorbierend? (Ohne Begründung)

(c) Geben Sie die Kommunikationsklassen an. (Ohne Begründung)

(d) Formulieren Sie ein *konkretes*[2] Gleichungssystem für die erwarteten Trefferzeiten k_i^A für $A = \{1, 5\}$ und $i = 1, \dots, 5$.

(e) (Fortsetzung) Ermitteln Sie Zahlenwerte k_i^A für $i = 1, \dots, 5$. Rechnen Sie exakt mit Brüchen und fassen Sie Ihr Ergebnis am Ende möglichst übersichtlich zusammen.

[2] Für das Aufschreiben des entsprechenden allgemeinen Satzes aus dem VO-Stoff allein gibt es keine Punkte!