

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und
Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2014S, 2.0h
Mai 2015
Hubalek/Scherrer**

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
Σ	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$ mit Zustandsraum $S = \{1, \dots, 6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/3, 0, 0, 0, 2/3, 0)$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}[X_2 = 3]$ und $\mathbb{P}[X_5 = 6 | X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1]$.
- (b) Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeiten für $\{3, 5\}$, also $\mathbb{P}_i[H < \infty]$ für $i \in I$, wobei $H = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{3, 5\}\}$.
- (c) Berechnen Sie die erwarteten Trefferzeiten, also $\mathbb{E}_i[H]$ für $i \in I$.
- (d) Ist $\{1, 2, 3, 4\}$ eine abgeschlossene Kommunikationsklasse? Wenn ja, ist sie rekurrent oder transient? Wenn nein, begründen Sie, warum nicht!
- (e) Ist $\{5, 6\}$ eine abgeschlossene Kommunikationsklasse? Wenn ja, ist sie rekurrent oder transient? Wenn nein, begründen Sie, warum nicht!

2. Aus einer Zeitreihe der Länge $T = 1000$ wurden folgende Autokovarianzen geschätzt:
 $\hat{\gamma}(0) = 3.125$, $\hat{\gamma}(1) = 1.875$.
- (a) Schätzen Sie mit Hilfe der Yule Walker Gleichungen ein AR(1) Modell für diese Zeitreihe.
 - (b) Berechnen Sie die h -Schrittprognosen und die entsprechenden Fehlervarianzen für $h = 1, 2, 3$. (Hinweis: Nehmen Sie dazu an, dass das in a) geschätzte AR Modell das wahre Modell ist!)

3. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W .

(a) Es sei¹

$$f(t) = (1 \wedge t)W(1), \quad t \geq 0.$$

Liegt f in M_T^2 für $T > 0$? Wenn nein, geben Sie eine genau Begründung, wenn ja, brauchen Sie keine Begründung, müssen aber $E[I_T(f)^2]$ für $T > 0$ berechnen.

(b) Es sei²

$$g(t) = (t - 1)_+ W(1), \quad t \geq 0.$$

Liegt g in M_T^2 für $T > 0$? Wenn nein, geben Sie eine genau Begründung, wenn ja, brauchen Sie keine Begründung, müssen aber $E[I_T(g)^2]$ für $T > 0$ berechnen.

(c) Der Prozess

$$h(t) = W(1)I_{[1,4)}(t), \quad t \geq 0$$

liegt in M_{step}^2 . Bestimmen Sie $\int_0^T h(t)dW(t)$ möglichst explizit für alle $T > 0$.

(d) Finden Sie die Ito-Prozess-Darstellung

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s)$$

für $\xi(t) = tW(t)$. (Nur das Ergebnis, die erforderlichen Eigenschaften von a und b müssen Sie nicht zeigen!)

(e) (Fortsetzung) Zeigen Sie dann mit der allgemeinen Ito-Formel, dass $\Xi(t) = \exp(-\xi(t))$ auch ein Ito-Prozess ist bestimmen Sie die Darstellung

$$\Xi(t) = \Xi(0) + \int_0^t A(s)ds + \int_0^t B(s)dW(s).$$

(Nur das Ergebnis, die erforderlichen Eigenschaften von A und B müssen Sie nicht zeigen!)

¹Sie wissen: $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

²Sie wissen: $x_+ = \max\{x, 0\}$.

4. Gegeben sind zwei stationäre Prozess (x_t) und (y_t) mit Erwartungswert $\mathbb{E}x_t = \mu_x$, $\mathbb{E}y_t = \mu_y$ und Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k)$ und $\gamma_y(k)$. Die beiden Prozesse sind unkorreliert zueinander, d.h. $\text{Cov}(x_t, y_s) = 0$ für alle $t, s \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie nun den Prozess $(z_t = \alpha x_{t+m} + \beta y_{t-m})$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (a) Zeigen Sie, dass der Prozess (z_t) stationär ist.
 - (b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu_z = \mathbb{E}z_t$ und die Autokovarianzfunktion $\gamma_z(k)$ von (z_t) .
 - (c) Nehmen Sie an, dass (x_t) und (y_t) MA Prozesse der Ordnung q_x bzw. q_y sind. Zeigen Sie, dass dann (z_t) auch ein MA Prozess ist. Welche Ordnung hat dieser MA Prozess?