Name:

Mat.Nr.: Studium:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2013S, 2.0h
März 2015
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Betrachten Sie den ARMA(1,1) Prozess $x_t = ax_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$, $|a| < 1$, $|b| < 1$, $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $x_t = y_t + by_{t-1}$, wobei (y_t) der AR(1) Prozess $y_t = ay_{t-1} + \epsilon_t$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass (x_t) folgende MA(∞) Darstellung hat:

$$x_t = \epsilon_t + \sum_{j\geq 0}(a+b)a^j\epsilon_{t-1-j}$$

   (c) Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion von (x_t) gegeben ist durch:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-a^2}(1+2ab+b^2) & \text{für } k=0 \\[2ex] \dfrac{\sigma^2}{1-a^2}a^{k-1}(a+b)(1+ab) & \text{für } k>0 \\[2ex] \gamma(-k) & \text{für } k<0 \end{cases}$$

   (d) Zeigen Sie, dass (x_t) ein white noise Prozess ist für $a+b=0$ oder $ab=-1$.

2. Gegeben ist ein ARMA(2,1) Prozess $x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1}$, $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$. Die Stabilitäts-Bedingung und die strikte minimum phase Bedingung sind erfüllt und daher gilt $\mathbb{H}_x(t) = \mathbb{H}_\epsilon(t)$. Wir betrachten die h-Schrittprognose $\hat{x}_{t+h}$ für x_{t+h} aus der unendlichen Vergangenheit $(x_s,\ s \leq t)$ und die entsprechenden Prognosefehler $\hat{u}_{t+h} = x_{t+h} - \hat{x}_{t+h}$. Beweisen Sie folgende Behauptungen:

   (a) 1-Schrittprognose ($h = 1$):

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{t+1} &= a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + b_1 \epsilon_t \\
\hat{u}_{t+1} &= \epsilon_{t+1} \\
\mathbf{E}\hat{u}_{t+1}^2 &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

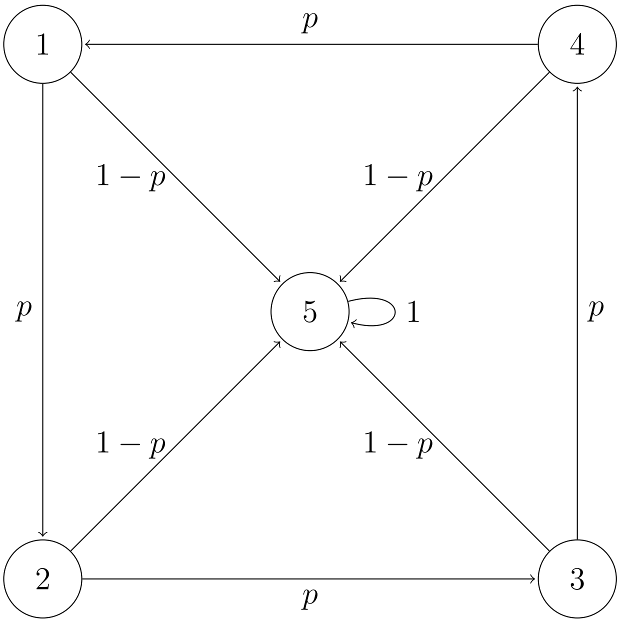
   (b) 2-Schrittprognose ($h = 2$):

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{t+2} &= a_1 \hat{x}_{t+1} + a_2 x_t \\
\hat{u}_{t+2} &= \epsilon_{t+2} + (a_1 + b_1)\epsilon_{t+1} \\
\mathbf{E}\hat{u}_{t+2}^2 &= \sigma^2(1 + (a_1 + b_1)^2)
\end{aligned}
$$

   (c) 3-Schrittprognose ($h = 3$):

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{t+3} &= a_1 \hat{x}_{t+2} + a_2 \hat{x}_{t+1} \\
\hat{u}_{t+3} &= \epsilon_{t+3} + (a_1 + b_1)\epsilon_{t+2} + (a_1^2 + a_1 b_1 + a_2)\epsilon_{t+1} \\
\mathbf{E}\hat{u}_{t+3}^2 &= \sigma^2(1 + (a_1 + b_1)^2 + (a_1^2 + a_1 b_1 + a_2)^2)
\end{aligned}
$$

3. Gegeben eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, deren Übergangswahrscheinl in folgendem Graphen dargestellt sind, wobei $p \in (0, 1)$ sein soll.



   (a) Wählen Sie eine Anfangsverteilung und geben Sie diese sowie die Übergangsmatrix der Kette an.

   (b) Sei $H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ und $h_i = \mathbb{P}_i[H < \infty]$ für $i \in I$. Bestimmen Sie $h_1, \ldots, h_5$. Keine Details notwendig, nur das Ergebnis. Notation wie in der Vorlesung und im Buch.

   (c) Sei $K = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{3, 5\}\}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[K]$ für die von Ihnen gewählte Anfangsverteilung. Keine Details notwendig, nur das Ergebnis.

   (d) Untersuchen bzw. berechnen Sie die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}, \quad i \in I.$$

   Notation wie in der Vorlesung und im Buch.

   (e) Welche Zustände sind rekurrent, welche transient? Geben Sie eine kurze, stichhaltige Begründung. Das Aufschreiben oder Umschreiben der Definition von Rekurrenz und Transienz bringt keinen Punkt!

4. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Gegeben sei weiters eine ganze Zahl $k \geq 1$ und der Prozess

   $$f(t) = W(k) \cdot 1_{[k,k+1)}(t), \quad t \geq 0.$$

   Zeigen bzw. begründen Sie, dass $f \in M^2_{\text{step}}$ liegt.

   (b) Berechnen Sie das stochastische Integral $I(f)$ möglichst explizit.

   (c) Gegeben sei eine ganze Zahl $n \geq 2$ und der Prozess

   $$g(t) = \sum_{j=1}^{n-1} W(j) \cdot 1_{[j,j+1)}(t) \quad t \geq 0.$$

   Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von

   $$X = \int_0^\infty g(t) dW(t).$$

   (d) Zeigen Sie, dass der Prozess Y mit

   $$Y(t) = W(t)^n, \quad t \geq 0,$$

   ein Ito-Prozess ist und geben sie den Anfangswert $Y(0)$ und die Prozesse a und b in der entsprechenden Darstellung

   $$Y(t) = Y(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW(s), \quad t \geq 0,$$

   an. Dass $Y(0)$, a und b die erforderlichen Messbarkeit- und Integrabilitätsbedingungen erfüllen, müssen und sollen Sie nicht zeigen.

   (e) (Fortsetzung) Zeigen Sie, dass der Prozess Z mit

   $$Z(t) = \cos(Y(t)), \quad t \geq 0,$$

   ein Ito-Prozess ist und geben sie den Anfangswert $Z(0)$ und die Prozesse A und B in der entsprechenden Darstellung

   $$Z(t) = Z(0) + \int_0^t A(s) ds + \int_0^t B(s) dW(s), \quad t \geq 0,$$

   an. Dass $Z(0)$, A und B die erforderlichen Messbarkeit- und Integrabilitätsbedingungen erfüllen, müssen und sollen Sie nicht zeigen.