

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und  
Zeitreihenanalyse  
Vorlesung, 2013S, 2.0h  
März 2014  
Hubalek/Scherrer**

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\Sigma$	20	

1. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und eine Brownsche Bewegung  $(W(t), t \geq 0)$ . Weiters sei  $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$  die natürliche Filtration von  $W$ .

(a) Geben Sie  $\mathbb{E}[W(t)]$ ,  $\mathbb{E}[W(s)]$ ,  $\mathbb{E}[W(t)W(s)]$ , und  $\mathbb{E}[W(s)^2]$  für  $0 \leq s \leq t$  an.

(b) Wir fixieren nun zwei Zeitpunkte  $0 \leq s \leq t$  und definieren die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(c_0, c_1) = \mathbb{E}[(W(t) - c_0 - c_1 W(s))^2], \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Finden Sie  $c_0, c_1$  sodass  $f(c_0, c_1)$  minimal wird. (Begründung!)

(c) Sei  $c_0^*, c_1^*$  die Lösung aus der vorherigen Teilaufgabe. Geben Sie  $f(c_0^*, c_1^*)$  an.

(d) Gibt es eine  $\mathcal{F}(s)$ -messbare Zufallsvariable  $Y$  mit  $\mathbb{E}[(W(t) - Y)^2] < f(c_0^*, c_1^*)$ ? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an, wenn nein, geben Sie eine Begründung, warum nicht.

(e) Sei<sup>1</sup>

$$\xi(t) = W(t \wedge \pi), \quad t \geq 0$$

Zeigen Sie, dass  $(\xi(t), t \geq 0)$  ein Ito-Prozess ist, indem Sie explizit eine Darstellung

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s) \quad a.s.$$

für alle  $t > 0$  angeben, und zeigen Sie, dass die Zufallsvariable  $\xi(0)$  und die Prozesse  $(a(t), t \geq 0)$  und  $(b(t), t \geq 0)$  die erforderlichen Eigenschaften haben.

2. Gegeben sei ein AR(2) Prozess  $(x_t = 0.2x_{t-1} + 0.5x_{t-2} + \epsilon_t)$  wobei  $(\epsilon_t)$  ein white noise Prozess mit Varianz  $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 2$  ist.

(a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung.

(b) Berechnen Sie die 2-Schrittprognose für  $x_{t+2}$  aus zwei vergangenen Werten, also aus  $x_t, x_{t-1}$ . Gesucht sind also die Koeffizienten  $c_0, c_1, c_2$  von  $\hat{x}_{t+2} = c_0 + c_1 x_t + c_2 x_{t-1}$ .

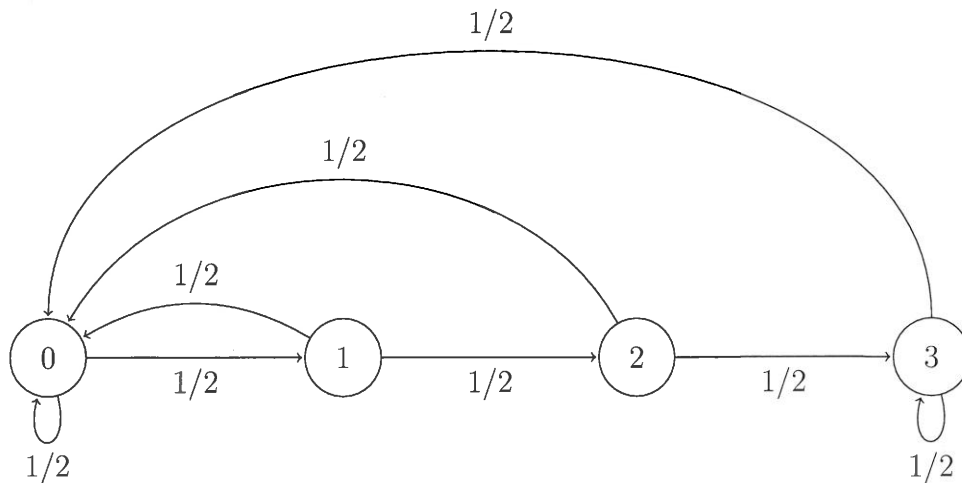
(c) Kann man die Prognose verbessern, wenn man mehr als zwei vergangene Werte verwendet?

(d) Berechnen Sie die Varianz des 2-Schrittprognose-Fehlers  $\hat{u}_{t+2} = x_{t+2} - \hat{x}_{t+2}$ . Hinweis: Drücken Sie die Prognosefehler durch eine Linearkombination von  $\epsilon_{t+2}, \epsilon_{t+1}, \epsilon_t, \dots$  aus.

(e) Berechnen Sie die Kovarianz der 2-Schrittprognose-Fehler  $\mathbf{Cov}(\hat{u}_{t+2}, \hat{u}_{s+2})$  (für  $t, s \in \mathbb{Z}$ ).

<sup>1</sup>Hier ist  $\pi = 3.1415926535 \dots$  und  $t \wedge \pi = \min(t, \pi)$ .

3. Gegeben Sei eine Markovkette  $(X_n)_{n \geq 0}$  mit Zustandsraum  $I = \{0, 1, 2, 3\}$ , Anfangsverteilung  $\delta_0$ , und Übergangswahrscheinlichkeiten die in folgendem Graphen dargestellt sind.



- (a) Geben Sie die Übergangsmatrix  $P$  an.  
 (b) Sei  $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 3\}$ . Berechnen Sie  $\mathbb{P}[T < \infty]$ .  
 (c) Berechnen Sie  $\mathbb{E}_1[T]$ .  
 (d) Ist die Kette irreduzibel? Wenn ja, begründen Sie genau, wie alle Zustände kommunizieren, wenn nein, geben Sie die Kommunikationsklassen der Kette an.  
 (e) Für  $n \geq 0$  sei

$$Y_n = \begin{cases} X_{T+n} & \text{wenn } T < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist  $(Y_n)_{n \geq 0}$  eine Markov-Kette? Wenn ja, begründen Sie kurz warum, und geben Sie den Zustandsraum, die Anfangsverteilung und die Übergangsmatrix an, wenn nein, begründen Sie genau, welche Eigenschaft in der Definition einer Markov-Kette nicht erfüllt ist.

4. Es sei  $(\epsilon_t)$  ein white noise Prozess mit Varianz  $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 1$ . Weiters sind zwei lineare Filter  $a(B) = 1 + B$  und  $b(B) = 1 - B$  gegeben. ( $B$  ist der Backshift-Operator.) Betrachten Sie folgende MA Prozesse und berechnen Sie deren Autokovarianzfunktion  $\gamma(k)$ :

- (a)  $(x_t) = a(B)(\epsilon_t)$   
 (b)  $(x_t) = b(B)(\epsilon_t)$   
 (c)  $(x_t) = a(B)(\epsilon_t) + b(B)(\epsilon_t)$

Betrachten Sie nun zwei (allgemeine) Filter der Form  $a(B) = 1 + a_1 B$  und  $b(B) = 1 + b_1 B$ . Zeigen Sie, dass der Prozess  $(x_t) = a(B)b(B)(\epsilon_t)$  dann und nur dann ein white noise Prozess ist, wenn  $a_1 = b_1 = 0$ .

