Name:

Mat.Nr.: Studium:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2012S, 2.0h
1.Oktober 2013
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt, bitte alle Zwischenschritte angeben)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Weiters sei $X(t) = 1 + t - W(t)^2$, $t \geq 0$. Berechnen Sie $E[X(t)|\mathcal{F}(s)]$ für alle $0 \leq s \leq t$.

   (b) (Fortsetzung) Ermitteln Sie $dX(t)$ mit der Ito-Formel.

   (c) (Fortsetzung) Begründen Sie sorgfältig und detailliert anhand der Definition eines Martingals in stetiger Zeit, dass $(X(t), t \geq 0)$ ein Martingal ist.[1]

   (d) Sei nun $f(t) = e^{-3t}$, $t \geq 0$. Berechnen Sie $\|f\|_{M^2}$. Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

   (e) (Fortsetzung) Berechnen Sie

$$E\left[\left(\int_0^\infty f(t)dW(t)\right)^2\right].$$

   Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

[1] Für das Aufschreiben der Definition allein gibt es keine Punkte!

2. Gegeben ist ein stationärer Prozess (x_t) mit Erwartungswert $\mathbf{E}x_t = \mu$ und Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t)$. Betrachten Sie nun den gefilterten Prozess (y_t)

$$y_t := \sum_{j=0}^{\infty} a^j (1-a) x_{t-j}$$

wobei $|a| < 1$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass der Filter $\sum_{j=0}^{\infty} a^j (1-a) B^j$ absolut summierbare Koeffizienten hat. (Daher existiert die unendliche Summe und der Prozess (y_t) ist stationär.)

(b) Zeigen Sie, dass (y_t) die Differenzengleichung

$$y_t = a y_{t-1} + (1-a) x_t$$

erfüllt.

(c) Zeigen Sie

$$\mathbf{E}y_t = \mathbf{E}x_t$$

(d) und

$$\mathrm{Var}(y_t) \leq \mathrm{Var}(x_t)$$

Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\gamma_x(k)| \leq \gamma_x(0)$ (bzw. $|\gamma_y(k)| \leq \gamma_y(0)$ für die Autokovarianzfunktion $\gamma_y(k)$ von (y_t)).

3. Gegeben ist ein MA(2) Prozess

$$x_t = \epsilon_t + \epsilon_{t-2}$$

wobei (ϵ_t) eine white noise Prozess mit Varianz $\sigma^2 = 1$ ist.

(a) Bestimmen Sie die Autokovarianzfunktion des Prozesses (x_t).

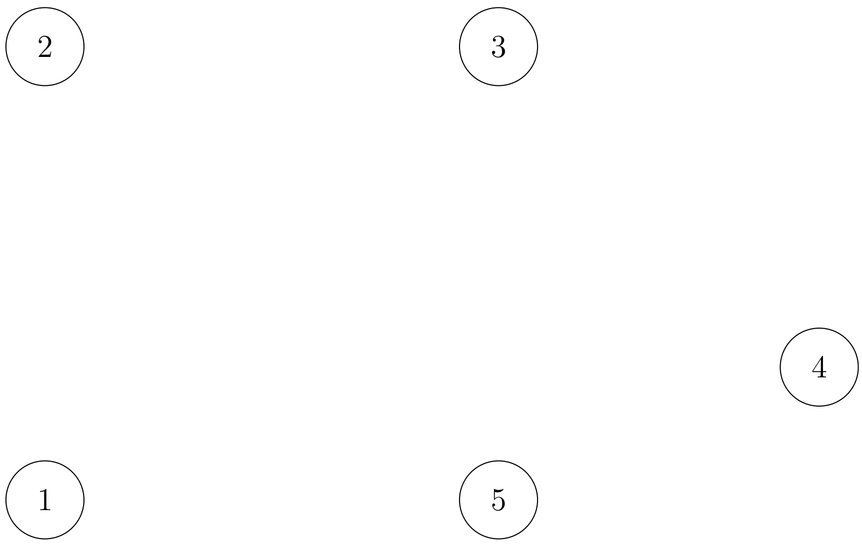
(b) Berechnen Sie die Einschrittprognose $\hat{x}_{t+1}$ aus drei vergangenen Werten ($\hat{x}_{t+1} = c_1 x_t + c_2 x_{t-1} + c_3 x_{t-2}$) und die entsprechende Prognosefehlervarianz $\sigma^2_{1,3}$.

(c) Vergleichen Sie $\sigma^2_{1,3}$ auch mit der Varianz des Einschrittprognosefehlers aus der unendlichen Vergangenheit. Um welchen Prozentsatz ist die Prognose aus drei vergangenen Werten schlechter als die Prognose aus der ganzen Vergangenheit?

4. Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Anfangsverteilung δ_2 und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie die Markovkette als Graph dar. Tragen Sie dazu in die untenstehende Skizze die entsprechenden Übergänge (als Pfeile) mit ihren Übergangswahrscheinlichkeiten ein.



(b) Welche Zustände sind absorbierend? (Ohne Begründung)

(c) Geben Sie die Kommunikationsklassen an. (Ohne Begründung)

(d) Formulieren Sie ein *konkretes*[2] Gleichungssystem für die erwarteten Trefferzeiten k_i^A für $A = \{1, 5\}$ und $i = 1, \ldots, 5$.

(e) (Fortsetzung) Ermitteln Sie Zahlenwerte k_i^A für $i = 1, \ldots, 5$. Rechnen Sie exakt mit Brüchen und fassen Sie Ihr Ergebnis am Ende möglichst übersichtlich zusammen.

[2] Für das Aufschreiben des entsprechenden allgemeinen Satzes aus dem VO-Stoff allein gibt es keine Punkte!