Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.078 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse

Vorlesung, 2010S, 3.0h

März 2012

Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Sei $\{W(t) : t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung, und $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ die von ihr erzeugte Filtration.

   (a) Wir betrachten die stochastischen Integrale

   $$X(t) = \int_0^t I_{[1,3)}(s) dW(s), \quad Y(t) = \int_0^t s I_{[2,4)}(s) dW(s).$$

   Berechnen Sie $\text{Cov}[X(t), Y(t)]$ mit der Ito-Isometrie für $2 < t < 3$.

   (b) Sei $t > 0$. Untersuchen Sie, ob

   $$\int_0^t \sqrt{s} dW(s), \quad \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} dW(s),$$

   (im Sinne unserer Vorlesung) definiert werden können, also ob die Integranden in M_t^2 liegen. Sollte das der Fall sein, so berechnen Sie zusätzlich die Varianzen mit der Ito-Isometrie.

   (c) Berechnen Sie $E[W(1)^2 W(3) | \mathcal{F}(2)]$ und $E[W(1) W(3)^2]$.

2. Es sei (y_t) ein AR(2) Prozess:

   $$y_t = 0.5 y_{t-2} + \epsilon_t$$

   wobei (ϵ_t) ein weißes Rauschen mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 1$ ist.

   (a) Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion des Prozesses gegeben ist durch:

   $$\gamma(k) = \begin{cases} 2^{-|k|/2}(4/3) & \text{für } k/2 \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   (b) Bitte berechnen Sie folgende Prognosen (Prädiktoren) und die zugehörige Prognosefehler-Varianz:

      i. Einschritt-Prognose aus einem Wert: $y_{t+1|t,1}$ (und die Prognosefehler-Varianz $\sigma_{1,1}^2$)
      ii. Einschritt-Prognose aus zwei Werten: $y_{t+1|t,2}$ (und die Prognosefehler-Varianz $\sigma_{1,2}^2$)
      iii. Zweischritt-Prognose aus einem Wert: $y_{t+2|t,1}$ (und die Prognosefehler-Varianz $\sigma_{2,1}^2$)
      iv. Zweischritt-Prognose aus zwei Werten: $y_{t+2|t,2}$ (und die Prognosefehler-Varianz $\sigma_{2,2}^2$)

3. Es sei $(y_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ ein stationärer Prozess mit Autokovarianzfunktion $\gamma_y(k)$ und einer Spektraldichte $f_y(\lambda)$. Betrachten Sie nun die ersten Differenzen, d.h. den Prozess $(z_t = y_t - y_{t-1} \,|\, t \in \mathbb{Z})$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Prozesse (z_t) stationär ist.

   (b) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma_z(k)$ von (z_t).

   (c) Berechnen Sie die Spektraldichte $f_z(\lambda)$ von (z_t) und zeigen Sie, dass $f_z(0) = 0$.

4. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, auf dem eine $\mathbb{N}_0$-wertige [1] Zufallsvariable Ψ und eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ gegeben ist. Damit definieren wir einen Prozess $(Z_n)_{n \geq 0}$ gemäß

   $$Z_n = P[\Psi \leq n | \mathcal{F}_n], \quad n \geq 0.$$

   (a) Berechnen Sie $E[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ für $n \geq 0$. Hinweis/Erinnerung: Für $A \in \mathcal{F}$ gilt $P[A|\mathcal{F}_n] = E[I_A | \mathcal{F}_n]$.

   (b) Ist $(Z_n)_{n \geq 0}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder gar kein Smartingal? (Sorgfältige Begründung!)

   (c) Angenommen

   $$P[\Psi = n] = \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

   Berechnen Sie $E[Z_n]$ für $n \geq 0$.

   (d) Angenommen Ψ hat die gleiche Verteilung wie in (c), ist aber unabhängig von $\mathcal{F}_n$ für alle $n \geq 0$. Welcher einfache Ausdruck ergibt sich dann für Z_n, $n \geq 0$?

   (e) Nehemen Sie an, anders als in (d), dass Ψ eine $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit ist. Welcher einfache Ausdruck ergibt sich dann für Z_n, $n \geq 0$?

[1] $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$