Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.078 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2011S, 3.0h
7.Oktober 2011
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Termine zur mündlichen Prüfung in der beiliegenden Liste bzw. nach Vereinbarung mit den Prüfern. Schriftliche Noten: Genügend 10–12, Befriedigend 13–15, Gut 16–18, Sehr gut 19–20. Punkte werden zur Wertung auf ganze Zahlen aufgerundet.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. (y_t) sei ein AR(4) Prozess:

$$y_t = 0.5y_{t-4} + \epsilon_t$$

wobei (ϵ_t) ein weißes Rauschen mit Varianz $E\epsilon_t^2 = 1$ ist.

   (a) Erfüllt dieses AR Modell die Stabilitätsbedingung?

   (b) Berechnen Sie bitte die stationäre Lösung (y_t), d.h. stellen Sie (y_t) als MA(∞) Prozess dar: $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \epsilon_{t-j}$.

   (c) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k)$ von (y_t).

2. Gegeben sei eine iid Folgen von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 1}$, wobei

$$P[X_n = 2] = \frac{1}{2}, \quad P[X_n = 0] = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

Weiters sei

$$M_n = \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1.$$

Es bezeichen $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 1}$ die von $(X_n)_{n\geq 1}$ erzeugte Filtration und Es bezeichen $(\mathcal{F}_n^M)_{n\geq 1}$ die von $(M_n)_{n\geq 1}$ erzeugte Filtration, also

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \ldots, X_n), \quad \mathcal{F}_n^M = \sigma(M_1, \ldots, M_n), \quad n \geq 1.$$

   (a) Ist $(M_n)_{n\geq 1}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder gar kein Smartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 1}$? (Sorgfältige Begründung!)

   (b) Ist $(M_n)_{n\geq 1}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder gar kein Smartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n^M)_{n\geq 1}$? (Begründung!)

   (c) Zeigen Sie, dass die beiden Filtrationen nicht übereinstimmen. Hinweis: Finden Sie ein Ereignis in $\mathcal{F}_2^X$, das nicht in $\mathcal{F}_2^M$ liegt.

   (d) Geben Sie eine einfache nichttriviale[1] obere Schranke für $P[\max(M_1, \ldots, M_n) > a]$ für $a > 0$ und $n \geq 1$ an (oder berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit exakt).

   (e) Finden Sie einen vorhersehbaren Prozess $(A_n)_{n\geq 0}$ mit $A_0 = 0$, sodass[2]

$$U_n = M_n^2 - \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k, \quad n \geq 1$$

   ein $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 1}$-Martingal ist. Hinweis: Betrachten Sie $E[\Delta M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}^X]$, wobei $\Delta M_n^2 = M_n^2 - M_{n-1}^2$.

3. $(\epsilon_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ sei ein IID Prozess, d.h. die ϵ_t's sind unabhängig und identisch verteilt. Die folgenden Prozesse (a)-(c) sind im allgemeinen *nicht* schwach stationär. Geben Sie eine Begründung für diese Behauptung und *hinreichende* Bedingungen unter denen die Prozesse schwach stationär sind.

   (a) $(y_t = \epsilon_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$

   (b) $(y_t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \epsilon_{t-k} \,|\, t \in \mathbb{Z})$ wobei $b_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ eine Folge von reellen Zahlen ist.

   (c) $(y_t = \epsilon_t \epsilon_{t-1} \,|\, t \in \mathbb{Z})$

4. Sei $\{W(t) : t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung, $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ die von ihr erzeugte Filtration und

$$\xi(t) = W(t)^2 + 2W(t) + t, \quad (t \geq 0).$$

   (a) Berechnen[3] Sie $\mathbf{E}[\xi(t)]$ und $\mathrm{Var}[\xi(t)]$ für $t \geq 0$.

   (b) Berechnen Sie $\mathbf{E}[\xi(t)|\mathcal{F}(s)]$ für $0 \leq s \leq t$ und für $0 \leq t < s$.

   (c) Ist $(\xi(t), t \geq 0)$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder überhaupt kein Smartingal? (Geben Sie eine sorgfältige Begründung!)

   (d) Berechnen Sie das stochastische Differential $d\xi(t)$.

   (e) Zeigen Sie sorgfältig, dass $(\xi(t), t \geq 0)$ ein Ito-Prozess ist.

---

[1] D.h. $P(\ldots) \leq 1$ oder schlechter gilt nicht!

[2] Sie wissen, $\Delta A_k = A_k - A_{k-1}$.

[3] Hinweis: Für $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt $\mathbf{E}[Z] = \mu$, $\mathbf{E}[Z^2] = \mu^2 + \sigma^2$, $\mathbf{E}[Z^3] = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$, $\mathbf{E}[Z^4] = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$.