Ein Widerspruch in überabzählbaren Mengen

(Fassung April 2011)

Abstract

Es sei *M* eine beliebig definierte Menge von Elementen E. Im folgenden Beitrag wird für jede derartige Menge *M* eine abzählbare Anordnung AO{E[*M*]} aller Elemente E $\in$ *M* angegeben. In jedem angeblichen Beweis der Unvollständigkeit dieser Anordnung durch Beschreibung eines in ihr nicht enthaltenen Elementes kann ein Widerspruch nachgewiesen werden.

Die Überlegungen beruhen darauf, dass "alles worüber gesprochen werden kann" - und dazu gehören sicher alle oben erwähnten Elemente E - auch in die Form von schriftlichen Mitteilungen M gebracht werden kann. Alle möglichen derartigen Mitteilungen sind zwar unbegrenzt aber endlich. Gleiches gilt für die Zahl aller möglichen Leser P solcher Mitteilungen und für alle möglichen Zeitpunkte T der Interpretation von M durch P. Man verbleibt also immer im Bereich des Abzählbaren.

Beitrag

Ein bekanntes Beispiel einer überabzählbaren Menge ist das Kontinuum, eine Menge mit der Mächtigkeit der reellen Zahlen. Um die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zu zeigen verwendet man gerne das zweite Diagonalargument von Cantor. Wir beziehen uns im Weiteren auf die Menge der reellen Zahlen RZ[0,1] zwischen 0 und 1[1]. Cantor versucht zu beweisen, dass keine abzählbare Anordnung dieser Menge möglich ist. Zu jeder angeblich vollständigen abzählbaren Anordnung AO{RZ[0,1]} von RZ[0,1] könne eine reelle Zahl r zwischen 0 und 1 gefunden werden, die nicht in AO{RZ[0,1]} enthalten ist.

Cantor geht dabei von einer beliebigen abzählbaren Anordnung AO{RZ[0,1]} von reellen Zahlen r_1, r_2, ... r_n, ... zwischen 0 und 1 aus. Diese schreibt man jeweils in der Form von unendlichen Dezimalzahlen $r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2}...r_{nn}.....$ an. Man bildet also das folgende Schema:

$$
\begin{array}{l}
r_1 = 0{,}r_{11}r_{12}...r_{1n}....\\
r_2 = 0{,}r_{21}r_{22}...r_{2n}....\\
... \qquad ...\\
r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2}...r_{nn}....\\
... \qquad ...\\
... \qquad ...
\end{array}
$$

Nun bildet man eine Zahl $d = 0{,}d_1d_2...d_m....$ mit der Eigenschaft $\forall m$: $d_m \neq r_{mm}$. Diese "Diagonalzahl"[2] ist offenbar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 und sie ist ungleich

[1] Die Zahlen 0 und 1 werden einbezogen.
[2] Sie wird durch die in der Diagonale des Schemas stehenden Zahlen bestimmt.

allen reellen Zahlen aus diesem Schema denn sie unterscheidet sich jeweils an der m^{ten} Dezimalstelle von r_m. Es gilt also $\forall m$: $d \neq r_m$ womit die Unvollständigkeit des Schemas und damit der Anordnung AO{RZ[0,1]} bewiesen erscheint.

Die Schwäche dieser Argumentation liegt darin, dass eine Diagonalzahl d erst dann als Beweis für die Unvollständigkeit von AO{RZ[0,1]} herangezogen werden darf, wenn alle ihre Dezimalstellen vollständig bekannt sind. Dies setzt aber voraus, dass entweder alle Dezimalstellen tatsächlich angeschrieben werden können - was nur für endlich viele Dezimalstellen möglich ist - oder dass die Bildungsvorschrift aller reellen Zahlen der Anordnung AO{RZ[0,1]} bekannt ist, wie dies etwa bei einer Anordnung aller rationalen Zahlen mit Hilfe des ersten Diagonalargumentes von Cantor der Fall ist. Jede Bildungsvorschrift für die Anordnung AO{RZ[0,1]} kann aber nur dann vollständig - das heißt für alle reellen Zahlen r_n aus AO{RZ[0,1]} - bekannt sein, wenn auch sie selbst durch eine endliche Beschreibung angegeben wird. Versucht man das zweite Diagonalargument anzuwenden ohne dass eine solche endliche Beschreibung vollständig vorliegt dann weiß man in keinem Zeitpunkt, in dem man über die Diagonalzahl spricht, worüber man überhaupt spricht.

Es wird dabei nämlich übersehen, dass die Bildungsvorschrift der Diagonalzahl selbst eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 in endlicher Form beschreibt. Ordnet man nun alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit Hilfe der sie jeweils beschreibenden Bildungsgesetze an - eine Form der Anordnung die, wie wir zeigen werden, unschwer möglich ist - dann müsste für die Diagonalzahl d sowohl $d \in$ AO{RZ[0,1]} gelten, da d ja eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 ist, als auch $d \notin$ AO{RZ[0,1]}, da mit d ja gerade die Unvollständigkeit von AO{RZ[0,1]} gezeigt werden soll. Die Definition der Diagonalzahl enthält also einen Widerspruch.

Unserem Ziel, eine abzählbare Anordnung AO{RZ[0,1]} aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 anzugeben, steht weiter noch die Frage im Wege, in welcher Sprache die jeweiligen Argumentationen, Beschreibungen und Bildungsgesetze abgefasst werden sollen. Um dieses Problem zu lösen überlegen wir zunächst, welches die Aufgabe einer Sprache ist und was eine Sprache leisten kann. Dazu eine Definition aus Google: "Das Sprechen ist der Vorgang des vorwiegend auf zwischenmenschliche Interaktion ausgerichteten Gebrauchs der menschlichen Stimme wobei artikulierte Sprachlaute erzeugt werden". Eine analoge zwischenmenschliche Interaktion ermöglicht die Schrift und wir wollen uns hier auf schriftliche zwischenmenschliche Interaktionen beschränken. Unserer Ansicht nach ist damit der gesamte Bereich wissenschaftlicher Diskussionen, insbesondere philosophische Abhandlungen, mathematische Sätze, deren Beweise bzw. Widerlegungen etc., erfasst.

Zunächst suchen wir Rahmenbedingungen für alle möglichen zwischenmenschlichen Interaktionen aufzufinden. Dies gelingt etwa mit Hilfe der im Folgenden als "Mitteilungen vom Umfang n" bezeichneten graphischen Darstellungen. Eine

Mitteilung vom Umfang n sei ein quadratischer Raster bestehend aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge 0,01 mm von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Ein solcher Raster kann z.B. ein Blatt Papier, eine Wandtafel, ein Monitor etc. bedeckt mit sichtbaren Zeichen sein. Unserer Ansicht nach umfasst die Menge dieser Mitteilungen M jedenfalls den oben angesprochenen Diskussionsbereich zur Gänze.

Im Weiteren ordnen wir alle Mitteilungen M vom Umfang n abzählbar an. Dazu ordnen wir einem weißen Elementarquadrat die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jene Ziffer, die dem Elementarquadrat in der Zeile j an der Stelle k zugeordnet wurde bezeichnen wir mit a_{jk}. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl $a(M) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Nun ordnen wir alle möglichen Mitteilungen zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n und anschließend innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) in einer Anordnung AO(M) abzählbar an.

Die Verwendung einer Mitteilung M für eine zwischenmenschliche Interaktion wie oben angesprochen setzt zweifellos voraus, dass es eine Person P gibt, welche M liest bzw. lesen könnte. Ob M für P tatsächlich eine Information bedeutet und falls ja welche kann grundsätzlich nur P selbst entscheiden. In unserem Fall sind zunächst vor allem jene Fälle von Interesse, in denen P sagt, "M stellt für mich eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei dar". Dabei ist es für uns gegenstandslos ob diese Aussage von P mit der Interpretation von M durch den Autor dieses Beitrages oder durch den Leser dieses Beitrages übereinstimmt oder nicht. Die Interpretation bleibt allein P überlassen.

Es hat zunächst den Anschein, als seien wir mit der Anordnung AO(M) aller möglichen Mitteilungen unserem Ziel einer abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 keinen Schritt näher gekommen, sind uns doch die Interpretationen von M durch eine von uns verschiedene Person P grundsätzlich unzugänglich. Ein Ausweg aus dieser Sackgasse kann aber darin gefunden werden, neben der Anordnung aller möglichen Mitteilungen M auch alle möglichen Interpretationen von M durch alle möglichen Personen P abzählbar anzuordnen.

Von einer tatsächlichen Interpretation einer Mitteilung M durch eine Person P kann nur dann gesprochen werden, wenn P die Mitteilung M tatsächlich liest. Von einer möglichen Interpretation wollen wir dann sprechen, wenn angenommen wird, dass auch ohne tatsächliches Lesen P dieser Interpretation von M zugestimmt hätte. Diese etwas hypothetische Formulierung wird es uns ermöglichen den eingangs angekündigten Widerspruch in Beweisen von angeblicher Unvollständigkeit abzählbarer Anordnungen zu zeigen.

Allerdings darf nicht übersehen werden, dass auch der Zeitpunkt der Interpretation von M durch P eine Rolle spielen kann. Die Person P könnte in einem Zeitpunkt über Informationen verfügen, die ihr in einem anderen Zeitpunkt nicht zur Verfügung stehen. Sie könnte etwa eine Sprache gelernt haben und damit einen anderen Zugang zu einer Mitteilung M haben als ohne Kenntnis dieser Sprache. Diesen Überlegungen trägt eine Anordnung aller möglichen Interpretationen von M Rechnung, die berücksichtigt, dass jede mögliche Interpretation jeder möglichen Mitteilung im Raum-Zeit-Universum stattfinden muss.

Dazu wählen wir ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate) und zerlegen es in Raum-Zeit-Elemente RZE. Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer 0,01 Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit Hilfe des vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich alle Elementarwürfel EW in einer abzählbaren Anordnung AO(EW) anordnen.

Bei jeder möglichen Interpretation einer Mitteilung M durch eine Person P können wir voraussetzen, dass der Lesevorgang eine gewisse Zeit dauert und P dabei im Raum ein gewisses Volumen einnimmt. Jede mögliche Interpretation erfordert daher ein gewisses Volumen im Raum-Zeit-Universum. Die Größe der Elementarwürfel EW wurde so klein gewählt, dass in jedem zu einer Interpretation erforderlichen Volumen Im Raum-Zeit-Universum sicher mindestens ein Elementarwürfel zur Gänze liegt. Durch diesen Elementarwürfel ist daher die Interpretation der Mitteilung M (dieser Lesevorgang) eindeutig gekennzeichnet. Da alle Elementarwürfel in AO(EW) abzählbar angeordnet werden können, lassen sich auch alle möglichen Interpretationen aller möglichen Mitteilungen in allen möglichen Zeitpunkten abzählbar anordnen.

Wir wenden nun diese Überlegungen zunächst auf die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 an. Dazu betrachten wir für jede mögliche Person P alle jene Mitteilungen M, welche in irgend einem Zeitpunkt T von P als eindeutige und widerspruchsfreie Darstellung einer reellen Zahl r zwischen 0 und 1 interpretiert werden. Man kann wegen der Abhängigkeit der Zahl r von M, P und T kurz r = r(M,P,T) schreiben. Wegen der Abzählbarkeit aller möglichen Personen und der Abzählbarkeit aller möglichen Interpretationen aller möglichen Mitteilungen M folgt daraus die Abzählbarkeit aller reellen Zahlen r(M,P,T) zwischen 0 und 1, also aller jener reellen Zahlen, die von irgend einer Person P bei der Interpretation der jeweiligen Mitteilung M in irgend einem Zeitpunkt T als durch M eindeutig und widerspruchsfrei dargestellt erklärt werden. Es sei AO[r(M,P,T)] die so erhaltene Anordnung.

Für jede reelle Zahl r(M,P,T) aus dieser Anordnung gibt es also eine Person P, für die in irgend einem Zeitpunkt T die Mitteilung M eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei darstellt. Wir wählen jetzt AO[r(M,P,T)] als die eingangs angesprochene "vollständige abzählbare Anordnung AO{RZ[0,1]}". und werden zeigen, dass jeder Versuch, mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor die Unvollständigkeit von AO[r(M,P,T)] zu zeigen, misslingt.

Der Kernpunkt der Cantor'schen Argumentation ist die Diagonalzahl d. Ihre Definition ist so gewählt, dass $\forall m$: $d_m \neq r_{mm}$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $\forall m$: $d \neq r_m$. Von einem Kritiker - nennen wir ihn als kritische Person PK - , der in irgendeinem Zeitpunkt TK behauptet, die Diagonalzahl d stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei dar, verlangen wir, diese Behauptung in die Form einer Mitteilung MK zu bringen. Dann ist d = r(MK,PK,TK) eine reelle Zahl zwischen 0 und 1und es gilt daher d = r(MK,PK,TK) $\in$ AO[r(M,P,T)]. Es sei $r_1, r_2, ... r_m, ...$ diese Anordnung AO[r(M,P,T)] und $d = r_m$ stehe an m^{ter} Stelle. Dann gilt definitionsgemäß $d_m = r_{mm}$. Nach dem zweiten Diagonalargument von Cantor müsste also sowohl $d_m \neq r_{mm}$ sein, weil dies die Definition von d erfordert, als auch $d_m = r_{mm}$ gelten, weil r_{mm} die m^{te} Dezimalstelle von d_m ist und dies ist der angekündigte Widerspruch. Der Versuch, mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung AO[r(M,P,T)] der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zu zeigen, ist also misslungen.

Wir wollen nun die Abzählbarkeit beliebig definierter Mengen *M* von Elementen E zeigen. Wie vorhin bei den reellen Zahlen zwischen 0 und 1 betrachten wir für jede mögliche Person P alle jene Mitteilungen M, welche in irgend einem Zeitpunkt T von P als eindeutige und widerspruchsfreie Darstellung eines Elementes E aus *M* interpretiert werden. Man kann wegen der Abhängigkeit des Elementes E von M, P und T kurz E = E(M,P,T) schreiben. Wegen der Abzählbarkeit aller möglichen Personen P und der Abzählbarkeit aller möglichen Interpretationen aller möglichen Mitteilungen M folgt daraus die Abzählbarkeit aller Elemente E(M,P,T), die von irgend einer Person P bei der Interpretation der jeweiligen Mitteilung M in irgend einem Zeitpunkt T als durch M eindeutig und widerspruchsfrei dargestellt erklärt werden. Es sei AO[E(M,P,T)] die so erhaltene Anordnung.

Für jedes Element E(M,P,T) aus dieser Anordnung gibt es also irgend eine Person P, für die in irgend einem Zeitpunkt T die Mitteilung M ein Element E aus *M* eindeutig und widerspruchsfrei darstellt. Wir wählen jetzt AO[E(M,P,T)] als die eingangs angesprochene "abzählbare Anordnung AO[E(*M*)] aller Elemente E $\in$ *M*" und werden zeigen, dass jeder Versuch, die Unvollständigkeit von AO[E(M,P,T)] zu zeigen, misslingt.

Behauptet nämlich ein Kritiker PK in irgend einem Zeitpunkt TK, es gäbe ein Element EK aus *M*, welches nicht in AO[E(M,P,T)] enthalten ist, verlangen wir von ihm, diese Behauptung in die Form einer Mitteilung MK zu bringen. Stimmt die Behauptung des Kritikers PK, das Element EK sei nicht in AO[E(M,P,T)] enthalten, dann gilt EK $\notin$ AO[E(M,P,T)]. Stimmt seine Behauptung, MK stelle ein Element aus *M* eindeutig und widerspruchsfrei dar, dann gilt per Definitionem EK $\in$ AO[E(M,P,T)]. Damit ist der angekündigte Widerspruch gezeigt.

Zur Herstellung des Widerspruchs in allen Beweisen der Überabzählbarkeit beliebig definierter Mengen haben wir die Anordnung AO[E(M,T,P)] herangezogen. Sie beruht auf der Interpretation aller möglichen Mitteilungen M durch alle möglichen Personen P in allen möglichen Zeitpunkten T. Die einzelnen Elemente dieser Anordnung kann, wie erwähnt; weder der Autor noch irgend ein Leser dieses Beitrages tatsächlich angeben, sind ihm doch alle Interpretationen von Mitteilungen durch andere Personen grundsätzlich nicht zugänglich. Jeder Interpretation haftet das "Individuelle" der jeweiligen interpretierenden Person an. Es erscheint daher sinnvoll, für alle derartigen Anordnungen die Bezeichnung "Individualanordnung" anzuwenden.

Zum Abschluss noch ein Hinweis. Der Widerspruch bei der Anwendung des zweiten Diagonalargumentes von Cantor zum Nachweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen beruht auf einem Zirkelschluss. Ein Zirkelschluss ist der Versuch, eine Aussage zu beweisen, indem diese Aussage selbst als Voraussetzung verwendet wird. Cantor geht einerseits von einer beliebigen Anordnung AO[RZ(0,1)] reeller Zahlen zwischen 0 und 1 aus, argumentiert aber dann mit einer Diagonalzahl, die von jeder in AO[RZ(0,1)] enthaltenen reellen Zahlen verschieden sein muss. Dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn tatsächlich jede Anordnung AO[RZ(0,1)] unvollständig, wenn also die reellen Zahlen tatsächlich überabzählbar wären. Die erst zu beweisende Überabzählbarkeit reeller Zahlen wird daher bei diesem Beweis bereits vorausgesetzt. Ein klassische Beispiel eines Zirkelschlusses.