Das Münchhausen-Paradoxon

Bekanntlich hat Münchhausen sich und sein im Sumpf versinkendes Pferd mit starkem Arm an seinem eigenen Zopf aus dem Sumpf gezogen. Dies wäre aber offensichtlich nur unter der Voraussetzung möglich gewesen, hätte der Freiherr einen fester Halt außerhalb des trügerischen Sumpfes gefunden. Tatsächlich musste er aber innerhalb des Sumpfes bleiben, so dass er keine derartige Stütze haben konnte.

Auch im Bereich logischer Schlussfolgerungen kann es geschehen, dass man versucht ist, Ketten von Schlussfolgerungen an Punkten festzumachen, die noch gar nicht zur Verfügung stehen. Dies führt dann zu Zirkelschlüssen. Ein anschauliches Beispiel eines derartigen Zirkelschlusses liefert das gern zum Beweis der Überabzählbarkeit des Kontinuums herangezogene zweite Diagonalargument von Cantor. Bei seiner Anwendung zum Nachweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen RZ(0,1) zwischen 0 und 1 geht man von einer **beliebigen abzählbaren Anordnung AO[RZ(0,1)]** von reellen Zahlen r_1, r_2, ... r_n, ... zwischen 0 und 1 aus und schreibt diese jeweils in der Form von unendlichen Dezimalzahlen $r_n = 0,r_{n1}r_{n2}...r_{nn}.....$ an. Anschließend bildet man mit Hilfe des Rasters der Zahlen r_n eine Zahl $d = 0,d_1d_2...d_m.....$ dergestalt, dass $\forall m$: $d_m \neq r_{mm}$. Daraus folgt $\forall n$: $d \neq r_n$ da die jeweils n^{te} Dezimalstelle von r_n ungleich der n^{ten} Dezimalstelle von d ist[1]. Zu jeder beliebigen abzählbaren Anordnung von reellen Zahlen zwischen 0 und 1 gibt es also eine in dieser Anordnung nicht enthaltene reelle Zahl d und diese Tatsache wird als Beweis der Überabzählbarkeit angenommen.

Naturgemäß spielt bei Fragen des Kontinuums und der Überabzählbarkeit der Begriff des Unendlichen eine entscheidende Rolle. Ein Beispiel liefert etwa die Menge der natürlichen Zahlen n. Zu jeder noch so großen natürlichen Zahl N kann durch Addition von 1 die größere Zahl N+1 gebildet werden und eine derartige schrittweise Ausweitung von endlichen Mengen natürlicher Zahlen findet kein Ende. Sie kann unendlich fortgesetzt werden. **Tatsächlich** angeben lassen sich zwar jeweils nur endlich viele n, ihre **mögliche** Anzahl ist aber unbegrenzt. Sie ist **aktual** endlich aber **potentiell** unendlich. Im Weiteren würden wir von einer **aktual unendlichen Menge** nur dann sprechen, wenn, wie bei endlichen Mengen, **jedes einzelne Element dieser Menge jederzeit tatsächlich angegeben werden kann.** Schon bei den natürlichen Zahlen ist das offenbar nicht der Fall.

Wir gehen zurück zur Diagonalzahl d aus dem zweiten Diagonalargument von Cantor. Sie bleibt unvollständig, solange nicht jede ihrer Dezimalstellen angegeben wird. Eine vollständige Angabe setzt aber voraus, dass entweder **alle Dezimalstellen tatsächlich angeschrieben werden können,** was nur für endlich viele Dezimalstellen möglich ist, oder dass **die Bildungsvorschrift aller reellen Zahlen der abzählbaren Anordnung AO[RZ(0,1)] bekannt ist,** wie dies etwa für eine Anordnung aller rationalen Zahlen mit Hilfe des ersten Diagonalargumentes von Cantor der Fall ist.

---

[1] Cantor setzt also voraus, dass **vor** der vollständigen Berechnung von d die abzählbare Anordnung AO[RZ(0,1)] bereits **vollständig** vorliegt.

Die Bildungsvorschrift für die Anordnung AO[RZ(0,1)] kann nur dann vollständig - das heißt für alle reellen Zahlen r_n aus AO[RZ(0,1)] - bekannt sein, wenn auch sie in endlicher Form, also etwa durch eine **endliche** Beschreibung, angegeben wird. Versucht man das zweite Diagonalargument anzuwenden, ohne dass eine solche endliche Beschreibung von AO[RZ(0,1)] vollständig vorliegt, **dann weiß man in keinem Zeitpunkt, in dem man über die Diagonalzahl spricht, worüber man überhaupt spricht.** Die für den Nachweis der Unvollständigkeit von AO[RZ(0,1)] notwendige Voraussetzung einer **aktual** vollständig vorliegenden Anordnung AO[RZ(0,1)] kann also nicht erfüllt werden.

Wir zeigen nun, wie das zweite Diagonalargument zum erwähnten Widerspruch führt. Dazu bringen wir zunächst Ordnung in **alle möglichen Bildungsvorschriften von Anordnungen reeller Zahlen RZ(0,1) zwischen 0 und 1.** Dabei verwenden wir den Begriff **"Mitteilungen M vom Umfang n".** Eine Mitteilung M vom Umfang n sei ein quadratischer Raster, bestehend aus n^2 **Elementarquadraten** der Seitenlänge 0,01 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist, und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit a_{jk}. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl $a(M) = 0,a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Im Weiteren fassen wir alle Mitteilungen M vom Umfang n zuerst in Gruppen nach ihrem Umfang n und anschließend innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) in einer **Anordnung AO(M)** abzählbar an. Offenbar lassen sich alle möglichen **endlichen** Bildungsvorschriften von Anordnungen reeller Zahlen zwischen 0 und 1 durch solche Mitteilungen M vom Umfang n eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben. Konkret können wir uns unter einer solchen Mitteilung M ein quadratisches weißes Papier oder einen quadratischen Bildschirm, jeweils mit der Seitenlänge $n/_{100}$ mm, vorstellen, auf dem schwarze Zeichen (Schriftzeichen, Formeln etc.) angebracht sind. Wie man sieht lassen sich mit Hilfe solcher Mitteilungen alle nur möglichen schriftlichen Informationen ausdrücken.

Im Weiteren suchen wir der Reihe nach in den Mitteilungen M aus den Anordnungen AO(M) nach solchen Mitteilungen M = M[RZ(0,1)], durch die reelle Zahlen zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. Diese Suche bewegt sich wie auch das Abzählen natürlicher Zahlen zwar im potentiell Unendlichen, bleibt aber doch stets im Endlichen. Da alle möglichen Mitteilungen M in der Anordnung AO(M) abzählbar angeordnet werden können und alle reellen Zahlen RZ(0,1), die unsere Durchsuchung der Anordnungen zu Tage fördert, durch mindestens eine Mitteilung M = M[RZ(0,1)] eindeutig und widerspruchsfrei dargestellt wird, können alle bei der Durchsuchung gefundenen reellen Zahlen RZ(0,1) in einer **Anordnung AO[RZ(0,1)]** abzählbar angeordnet werden.

Jeder Kritiker, der die Unvollständigkeit von AO[RZ(0,1)] mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor durch die Bildung einer angeblich in AO[RZ(0,1)] nicht enthaltenen Diagonalzahl d beweisen will, muss diese Diagonalzahl jedenfalls **durch eine "kritische" Mitteilung MK eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben**

können. Der Kritiker behauptet dann offenbar **d ∉ AO[RZ(0,1)],** denn die durch MK beschriebene Diagonalzahl d soll ja gerade die Unvollständigkeit von AO[RZ(0,1)] beweisen. Andererseits enthält die Anordnung AO[RZ(0,1)] per definitionem **alle** durch eine Mitteilung M eindeutig und widerspruchsfrei beschreibbaren reellen Zahlen RZ(0,1). Die Vorschrift zur Konstruktion der Diagonalzahl d mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor wird aber offenbar selbst durch die kritische Mitteilung MK eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben. Nach der Definition von AO[RZ(0,1)] gilt daher **d ∈ AO[RZ(0,1)]** im Widerspruch zur Behauptung des Kritikers. Damit ist der oben angekündigte Widerspruch hergeleitet.

Der Zirkelschluss des Kritikers beruht darauf, dass er von einer beliebigen abzählbaren Anordnung AO[RZ(0,1)] ausgeht und dabei nicht zwischen potentiell unendlichen und aktual unendlichen Mengen reeller Zahlen unterscheidet. Bleibt er bei der zugrunde gelegten Anordnung AO[RZ(0,1)] im nur potentiell unendlichen Bereich, dann führt seine Argumentation zum eben hergeleiteten Widerspruch. Einen solchen kann er nur vermeiden, wenn er AO[RZ(0,1)] als aktual unendlich voraussetzt. In diesem Fall kann aber die Diagonalzahl d in keinem Zeitpunkt vollständig angegeben werden, da der Kritiker keine Bildungsvorschrift für AO[RZ(0,1)] im aktual Unendlichen angeben kann. Eine solche Bildungsvorschrift würde aktual unendliche und nicht nur potentiell unendliche Mitteilungen M erfordern. Die Anwendung des Diagonalargumentes durch den Kritiker impliziert daher bereits eine aktual unendliche Anordnung AO[RZ(0,1)], womit der Zirkelschluss vollzogen ist. Der Versuch, die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durch die Angabe einer von keiner Mitteilung M aus der Menge aller Mitteilungen M = M[RZ(0,1)] eindeutig und widerspruchsfrei beschriebenen reellen Zahl RZ(0,1) zwischen 0 und 1 zu beweisen, ist also fehlgeschlagen.

Wir wenden im Folgenden die gleichen Überlegungen auf beliebige angeblich überabzählbare Mengen von Elementen E an. Es sei also eine beliebig definierte Menge $\mathcal{M}$ von Elementen E gegeben. Bei $\mathcal{M}$ kann es sich um die eben behandelte Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 handeln, um die Menge der einstelligen ganzzahligen Funktionen, um die Potenzmenge der natürlichen Zahlen oder welche Menge auch immer. Nun suchen wir wie vorhin der Reihe nach in den Mitteilungen M aus der Anordnung AO(M) nach solchen Mitteilungen M = M{$\mathcal{M}$}, durch die Elemente E ∈ $\mathcal{M}$ eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. Auch diese Suche bewegt sich wieder zwar im potentiell Unendlichen, bleibt aber doch stets im Endlichen. Da alle möglichen Mitteilungen M in der Anordnung AO(M) abzählbar angeordnet werden können und alle Elemente E = E{$\mathcal{M}$} ∈ $\mathcal{M}$, die unsere Durchsuchung der Anordnung zu Tage fördert, durch mindestens eine Mitteilung M = M{$\mathcal{M}$} eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden, können alle bei der Durchsuchung gefundenen Elemente E in einer Anordnung AO{E[$\mathcal{M}$]} abzählbar angeordnet werden. **Angebliche Beweise der Überabzählbarkeit der Elemente E = E{$\mathcal{M}$} führen also entweder zu einem Widerspruch oder sie beruhen auf der Voraussetzung einer vor der Beweisführung zugrundegelegten aktual unendlichen Anordnung.**