ARBEITEN ZUM THEMA
DER BEGRIFFSRELATIVITÄT

K.-H. WOLFF

INHALTSVERZEICHNIS

And speech created thought
Which is the measure of the universe.

SHELLEY

Vorbemerkung:

Die folgenden Darstellungen sind Versuche einer Kritik an manchen, nach Meinung des Autors unzulässigen Verallgemeinerungen von Begriffen, die letztlich zu einer ebenso unzulässigen Verabsolutierung solcher Begriffe führen, zu formulieren. Es soll vorallem die jedem Begriff innewohnende Relativität seiner Bedeutung bewußt gemacht werden. Erst in zweiter Linie sind gewisse Folgerungen, etwa für die Problematik der überabzählbaren Mengen, Gegenstand der Überlegungen.

Die unterschiedlichen Darstellungen sollen verschiedene Wege zum wesentlichen Inhalt der Aussagen anbieten. Man kann jedoch ohne Schwierigkeiten sehen, daß etwa der in der ersten Arbeit (1972) verwendete Begriff des "Vorwissens" in späteren Arbeiten durch den "Zustand" des Kybernetischen Systems (der Person) P im Zeitpunkt t ersetzt wird. In beiden Fällen wird jedoch lediglich die jeder Aussage bzw. jeder Mitteilung innewohnende Relativität berücksichtigt.

Der Kernpunkt der Aussagen ist der folgende: Jeder Versuch, die Menge alles Existierenden über die Menge alles für irgendeine Person in irgendeinem Zeitpunkt potentiell denkbaren, also potentiell mitteilbaren, hinaus zu erweitern gleicht dem Versuch Münchhausens sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen.

ZUR PROBLEMATIK DES BEGRIFFES DER ÜBERABZÄHLBARKEIT

1\. Alles Denkbare ist mitteilbar.

1.1 Alles Erfahrbare wird in Empfindungen und in Gedanken geteilt.

1.2 Alles Formulierbare, d.h. in einer Schrift Ausdrückbare, wird als Gedanke, alles Nichtformulierbare als Empfindung bezeichnet.

1.2.1 Durch 1.2 wird lediglich eine Definition von Gedanken und Empfindungen gegeben, die für die weiteren Ableitungen ausreicht.

1.2.2 Die in 1.2 verwendeten Begriffe "Schrift" bzw. "ausdrückbar" müssen nicht näher erläutert werden; es genügt im wesentlichen, daß Mitteilungen nach 4.1, 4.6.2.2, 4.7.2.2, 4.8.2.2 und 5.3 als in einer Schrift ausdrückbar verstanden werden.

1.2.3 Nach der Definition 1.2 können auch Gedanken über Empfindungen ausgedrückt werden.

1.3 Gedanken können Objekte eindeutig beschreiben.

1.3.1 Gedanken als formulierbare Erfahrung können in schriftlichen "Mitteilungen" formuliert werden.

1.3.2 Die Mitteilung: "Der Schmied schmiedet ein Eisen" beschreibt kein Objekt eindeutig.

1.3.3 Die Mitteilung "Schmied" ist im allgemeinen mehrdeutig. Sie kann einen Namen, einen Beruf oder eine bestimmte Person beschreiben; sie kann ein Objekt eindeutig beschreiben, wenn die Eindeutigkeit der Bezeichnung "Schmied" durch vorhergehende Mitteilungen sichergestellt wurde.

1.3.4 Die Mitteilung "Josef Schmied, geboren am 12.12.1949 in Villach, Österreich" wird im allgemeinen eindeutig sein. Durch sie wird das Objekt Josef Schmied eindeutig beschrieben.

1.4 Die Menge der Mitteilungen, durch die ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird, ist eine Teilmenge der Menge aller Mitteilungen.

1.4.1 Je nach dem Vorwissen ist eine Mitteilung verständlich oder nicht.

1.4.1.1 Zum Verständnis jeder Mitteilung sind gewisse Vorkenntnisse, wie z.B. Kenntnisse der Sprache, in der die Mitteilung abgefaßt ist, erforderlich.

1.4.1.2 Neben der Kenntnis der Sprache muß auch die Kenntnis spezieller Begriffe, spezieller Bezeichnungen, allgemein eine gewisse Fachkenntnis vorausgesetzt werden.

1.4.1.3 Alle beim Lesen einer Mitteilung vorhandenen Kenntnisse werden als Vorwissen bezeichnet.

1.4.2 Mangelndes Vorwissen kann durch Lernen erworben werden.

1.4.2.1 Das Lernen z.B. einer Sprache oder eines Kalküls kann selbst in einer Mitteilung formuliert werden, wie z.B. in Lehrbüchern.

1.4.2.2 Ist eine für eine Person P_1 verständliche Mitteilung für eine Person P_2 mangels ausreichenden Vorwissens unverständlich, so kann der zur Erwerbung dieses Vorwissens notwendige Lernvorgang in einer Mitteilung formuliert werden, mit der zusammen die ursprüngliche Mitteilung auch für die Person P_2 verständlich wird.

1.4.2.3 Eine für P_1 verständliche Mitteilung, die durch keinen wie immer gearteten, in Form einer Mitteilung formulierbaren Lernvorgang für P_2 verständlich gemacht werden kann, kann nicht Gegenstand einer sinnvollen Diskussion zwischen P_1 und P_2 sein (vgl. 3.3.3).

1.4.3 Da der Sinn einer Mitteilung vom Vorwissen abhängt, ist die Entscheidung, ob durch eine Mitteilung ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird, vom Vorwissen und damit personenabhängig.

2. Alle Mitteilungen können abzählbar angeordnet werden.

2.1 Wegen 1.2 ist es ausreichend, sich auf schriftliche Mitteilungen zu beschränken.

2.2 Als Bildschirmmitteilung vom Maß n^2 wird ein Raster von schwarzen oder weißen Elementarquadraten der Seitenlänge 1/10 mm bezeichnet, die in n Zeilen zu je n Elementarquadraten angeordnet sind.

2.2.1 In solchen Bildschirmmitteilungen kann alles dargestellt werden, was auf einem schwarz-weißen Fernsehbildschirm aufgezeichnet werden kann.

2.2.2 Alle schriftlichen Mitteilungen können in Form einer Bildschirmmitteilung dargestellt werden.

2.2.3 Im allgemeinen kommt jede Mitteilung in der Menge der Bildschirmmitteilungen unendlich oft vor.

2.2.3.1 Im allgemeinen bleibt der Sinn einer Mitteilung unverändert, wenn das Schriftbild der Mitteilung auf das 2-, 3-, ..., m-, ...-fache vergrößert wird.

2.2.3.2 Dies gilt nicht, wenn ein absoluter Maßstab, z.B. der Abstand zweier Punkte, essentieller Inhalt der Mitteilung ist.

2.3 Die Menge aller Bildschirmmitteilungen kann abzählbar angeordnet werden.

2.3.1 Zunächst wird jedem weißen Elementarquadrat die Ziffer 0 und jedem schwarzen Elementarquadrat die Ziffer 1 zugeordnet.

2.3.2 Jeder Mitteilung vom Maße n^2 wird eine $(n^2 + 2)$-stellige Zahl zugeordnet, deren erste und deren letzte Stelle 1 ist und deren $(r - 1)n + s + 1^{te}$ Stelle 0 oder 1 ist, je nachdem, ob in der r^{ten} Zeile das s^{te} Elementarquadrat weiß oder schwarz ist.

2.3.3 Die Bildschirmmitteilungen werden nun nach der Größe der gemäß 2.3.2 zugeordneten Zahlen angeordnet.

2.4 Die Menge aller Bildschirmmitteilungen heiße Universalschrift.

2.4.1 Wegen 2.2.2 enthält die Universalschrift alle schriftlichen Mitteilungen.

3. Alle Denkobjekte können in einer Universalanordnung abzählbar angeordnet werden.

3.1 Die Mitteilungen aus der Universalschrift können in der Reihenfolge ihrer Anordnung nach 2.3 durchgemustert werden.

3.2 Es werden jene Mitteilungen ausgewählt, durch die ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

3.3 Die Menge der so erhaltenen Denkobjekte ist personenunabhängig.

3.3.1 Um 3.3 zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß es zu jeder Mitteilung $M(P_1)$, durch die für eine Person P_1 ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird, eine Mitteilung $M(P_2)$ gibt, durch die für eine Person P_2 das Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

3.3.2 Es sind drei Fälle möglich:

3.3.2.1 Entweder versteht P_2 die Mitteilung $M(P_1)$ in gleicher Weise wie P_1, dann gilt $M(P_1) = M(P_2)$ und diese Mitteilung beschreibt für P_1 und P_2 dasselbe Denkobjekt eindeutig, oder

3.3.2.2 P_2 versteht $M(P_1)$ nur deshalb nicht, weil ihm das Vorwissen fehlt, dann wird der zur Erlangung des Vorwissens notwendige Lernvorgang gemäß 1.4.2.2 in einer Mitteilung $M(P_1,P_2)$ formuliert, so daß $M(P_1,P_2) + M(P_1) = M(P_2)$

für P_2 verständlich ist und das selbe Denkobjekt eindeutig beschreibt, oder

3.3.2.3 es gibt keine derartige Mitteilung $M(P_1,P_2)$.

3.3.3 Im Falle 3.3.2.3 ist es offenbar P_1 durch keine wie immer geartete Mitteilung möglich, P_2 über das durch $M(P_1)$ eindeutig beschriebene Denkobjekt zu informieren.

3.3.4 In diesem Falle bildet P_2 die Mitteilung
$M(P_2)$: = "Das Denkobjekt, das für P_1 im Zeitpunkt T durch die Mitteilung $M(P_1)$ eindeutig beschrieben wird."

3.3.4.1 In $M(P_2)$ nach 3.3.4 bezeichnet T einen Zeitpunkt, in dem P_1 behauptet, daß durch die Mitteilung $M(P_1)$ ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

3.3.4.2 Da das Denkobjekt für P_2 unbeschreibbar ist, bietet die Mitteilung $M(P_2)$ die einzige Möglichkeit, dieses Denkobjekt unter Verwendung des Vorwissens von P_1 eindeutig zu beschreiben.

3.3.4.3 P_2 weiß zwar nicht und kann auch nach Voraussetzung nie wissen, wie das Denkobjekt, das für P_1 durch $M(P_1)$ eindeutig beschrieben wird, beschaffen ist, doch kann er die Mitteilung $M(P_2)$ eindeutig diesem Denkobjekt zuordnen.

3.3.5 Da sich alles Denken in Raum und Zeit abspielen muß, kann die Angabe von P_1 und T in 3.3.4 durch die Angabe eines Raum-Zeit-Elementes (RZE) ersetzt werden.

3.3.5.1 Ein Raum-Zeit-Element sei ein Würfel von der Kantenlänge der Elementarlänge und der Dauer der Elementarzeit.

3.3.5.2 Das Raum-Zeit-Universum kann in RZE unterteilt werden, die abzählbar angeordnet werden können.

3.3.5.3 Da sich Denken in Raum und Zeit abspielt, gibt es zu jedem Gedanken und insbesondere zu jedem Lesen einer schriftlichen Mitteilung mindestens ein RZE, das diesem Denken bzw. dem Lesen der Mitteilung eindeutig zugeordnet werden kann.

3.3.5.4 Durch ein P_1 und T bezeichnendes RZE wird insbesondere das Vorwissen von P_1 im Zeitpunkt T eindeutig bestimmt. Einem RZE ist höchstens ein Vorwissen zugeordnet, jedem Vorwissen ist (mindestens) ein RZE zugeordnet.

3.3.6 Im Falle von 3.3.2.3 leistet die Mitteilung
$M(P_2)$: = "Das Denkobjekt, das durch $M(P_1)$ im RZE Nr.N eindeutig beschrieben wird"
dasselbe wie die Mitteilung $M(P_2)$ aus 3.3.4.

3.3.7 Zu jeder Mitteilung $M(P_1)$ kann P_2 eine Mitteilung $M(P_2)$ nach 3.3.2.1, 3.3.2.2 oder 3.3.6 bilden, durch die P_2 das selbe Denkobjekt wie P_1 eindeutig beschreibt, womit 3.3. bewiesen ist.

3.4 Die Menge aller Denkobjekte aus der Universalanordnung ist vollständig.

3.4.1 Nach 3.3 ist die Menge der in der Universalanordnung enthaltenen Denkobjekte für alle Personen gleich, so daß niemand ein nicht in der Universalanordnung enthaltenes Denkobjekt eindeutig beschreiben kann. In diesem Sinn ist die Vollständigkeit zu verstehen.

3.4.2 Die Anordnung der Denkobjekte in der Universalanordnung ist personenabhängig.

3.4.2.1 Der Platz eines Denkobjektes in der Universalanordnung richtet sich nach dem Platz der dieses Denkobjekt eindeutig beschreibenden Mitteilung in der Anordnung nach 2.3.

3.4.2.2 Nur im Falle von 3.3.2.1 wird für P_1 und P_2 ein Denkobjekt durch die selbe Mitteilung eindeutig beschrieben, während in den übrigen Fällen verschiedene Mitteilungen für die Beschreibung verwendet werden.

3.4.2.3 Verschiedene Mitteilungen haben verschiedene Plätze in der Anordnung nach 2.3 und die ihnen zugeordneten Denkobjekte im allgemeinen verschiedene Plätze in der Universalanordnung, woraus die Personenabhängigkeit der Universalanordnung folgt.

3.5 Als Denkobjekte werden insbesondere Elemente von Mengen betrachtet, deren absolute Überabzählbarkeit behauptet wird.

3.5.1 Da die vorliegende Arbeit eine Kritik an der Einführung überabzählbarer Mengen einschließt, werden für den unanschaulichen Begriff "Denkobjekte" insbesondere "reelle Zahlen", "Funktionen" und "Mengen von natürlichen Zahlen" eingesetzt werden.

3.5.2 Es wird gezeigt werden, daß die üblichen Beweise für die Überabzählbarkeit von Mengen solcher Denkobjekte einen Widerspruch beinhalten.

4. Die Behauptung, ein Denkobjekt sei in der Universalanordnung nicht enthalten, führt zu einem Widerspruch.

4.1 Eine solche Behauptung aufstellen heißt, eine Mitteilung formulieren, die das angeblich nicht enthaltene Denkobjekt eindeutig beschreibt.

4.2 Diese Mitteilung ist in der Universalschrift enthalten.

4.3 Die Behauptung, das Denkobjekt sei in der Universalanordnung nicht enthalten, inkludiert die Behauptung, die Mitteilung nach 4.1 beschreibe ein Denkobjekt eindeutig.

4.4 Nach 3.2 folgt aus 4.3, daß dieses Denkobjekt in der Universalanordnung enthalten ist.

4.5 Zunächst muß vorausgesetzt werden, daß durch 4.1 ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird, damit in einem zweiten Schritt das Fehlen dieses Denkobjektes in der Universalanordnung behauptet werden kann. Diese zweite Behauptung steht aber nun im Widerspruch zu 4.4.

4.6 Als erstes Beispiel wird gezeigt, daß der Beweis der Überabzählbarkeit der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 mit Hilfe des Diagonalverfahrens einen Widerspruch enthält.

4.6.1 Zunächst wird der übliche Beweis nach CANTOR formuliert:

4.6.1.1 Es sei eine abzählbare Anordnung A aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{l}
a_1 = 0'a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots\ldots \\
a_2 = 0'a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ldots\ldots \\
\vdots \\
a_n = 0'a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots \\
\vdots
\end{array}$$

4.6.1.2 Nun bilde die Dezimalzahl

$$b = 0'b_1b_2\ldots b_n\ldots \wedge \bigwedge_n b_n = \begin{cases} 1 \text{ für } a_{nn} \neq 1, \\ 2 \text{ für } a_{nn} = 1. \end{cases}$$

4.6.1.3 Aus der Definition von b folgt $\bigwedge_n b_n \neq a_{nn}$ und daraus $\bigwedge_n b \neq a_n$, so daß b in A nicht enthalten ist, woraus die Unvollständigkeit der Anordnung A folgt.

4.6.2 Entsprechend 4.1 bis 4.5 kann gezeigt werden, daß die Beweisführung 4.6.1 einen Widerspruch enthält.

4.6.2.1 Die hier angeschriebene Form der Anordnung A ist unvollständig, da unendliche Dezimalzahlen nicht in dieser Form und auch nicht in unendlicher Anzahl angeschrieben werden können.

4.6.2.2 Soll eine derartige Anordnung Anspruch auf Vollständigkeit erheben können, dann muß das Bildungsgesetz jeder einzelnen Dezimalzahl und die vollständige Anordnung aller Dezimalzahlen explizit angegeben werden.

4.6.2.2.1 Die Dezimalzahl o'333..... kann in der Form $o'\dot{3}$ oder 1/3 angeschrieben werden.

4.6.2.2.2 Die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, kann in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ geschrieben werden.

4.6.2.2.3 Ein Beispiel einer nicht berechenbaren Zahl ist

$$\alpha = o'\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$$

mit

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 \text{ wenn } x^n + y^n = z^n \text{ ganzzahlig lösbar,} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

4.6.2.2.4 Auch wenn es sich um unendliche Dezimalzahlen handelt, muß jede einzelne durch eine endliche Mitteilung beschrieben werden können.

4.6.2.2.5 Man bildet nun eine Anordnung A aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 durch Anordnung dieser Dezimalzahlen entsprechend dem Platz der sie beschreibenden Mitteilungen nach 2.3 bzw., was dasselbe ist, durch ihren Platz in der Universalanordnung.

4.6.2.3 Wird die Unvollständigkeit der nach 4.6.2.2.5 angeordneten Menge von Dezimalzahlen mit Hilfe des Diagonalverfahrens gemäß 4.6.1 behauptet, dann bildet man eine Mitteilung M, die die Definition der Anordnung enthält, also etwa die vorangeführten Punkte 1 bis 4.6.2.2.5. Diese Mitteilung ergänze man durch den Satz: "Nun wird eine Zahl b entsprechend 4.6.1.2 unter Zugrundelegung der Anordnung nach 4.6.2.2.5 gebildet."

4.6.2.4 Der mit Hilfe des Diagonalverfahrens geführte Beweis der Unvollständigkeit von A beruht auf der Behauptung, daß durch die Mitteilung M aus 4.6.2.3 eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1, nämlich b, eindeutig beschrieben wird.

4.6.2.5 Nach dieser Behauptung ist b ein durch eine Mitteilung eindeutig beschriebenes Denkobjekt, so daß per definitionem für b ein Platz in der Anordnung A reserviert ist, d.h. es gilt $\bigvee_m b = a_m$.

4.6.2.6 Aus der Definition von b nach 4.6.1.2 und A nach 4.6.2.2.5 folgt $\bigwedge_m b \neq a_m$ und dies steht in Widerspruch zu 4.6.2.5.

4.7 Als nächstes wird gezeigt, daß der Beweis der Überabzählbarkeit der einstelligen ganzzahligen Funktionen natürlicher Zahlen mit Hilfe des Diagonalvefahrens einen Widerspruch enthält.

4.7.1 Zunächst wird der übliche Beweis mit Hilfe des Diagonalverfahrens formuliert:

4.7.1.1 Es sei eine Anordnung A aller einstelligen ganzzahligen Funktionen natürlicher Zahlen gegeben und $f_n(x)$ sei die n^{te} Funktion in dieser Anordnung.

4.7.1.2 Nun bildet man die Funktion F(x) mit $\bigwedge_n F(n) = f_n(n) + 1$.

4.7.1.3 Aus 4.7.1.2 folgt
$\bigwedge_n F(n) \neq f_n(n)$ und daraus
$\bigwedge_n F(x) \neq f_n(x)$,
so daß die einstellige ganzzahlige für alle natürlichen Zahlen definierte Funktion F(x) in A nicht enthalten ist.

4.7.2 Analog zu 4.6.2 kann gezeigt werden, daß die Beweisführung nach 4.7.1 einen Widerspruch enthält.

4.7.2.1 In eine Anordnung A werden alle einstelligen ganzzahligen Funktionen natürlicher Zahlen aus der Universalanordnung aufgenommen und es sei $f_n(x)$ die n^{te} Funktion in dieser Anordnung.

4.7.2.2 Nun bilde eine Mitteilung M bestehend aus der vollständigen Definition der Anordnung A gemäß 4.7.2.1 und aus der Definition von F(x) durch $\bigwedge_n F(n) = f_n(n) + 1$.

4.7.2.3 Die Beweisführung nach 4.7.1 beruht auf der Behauptung, durch die Mitteilung M nach 4.7.2.2 werde eine einstellige ganzzahlige Funktion natürlicher Zahlen beschrieben. In diesem Fall ist diese Funktion in der Universalanordnung und damit in der Anordnung A enthalten, woraus $\bigvee_m F(x) = f_m(x)$ folgt.

4.7.2.4 Die Folgerung aus der Definition aus 4.7.2.2, $\bigwedge_n F(x) \neq f_n(n)$ steht mit $\bigvee_m F(x) = f_m(x)$ in Widerspruch, so daß die Behauptung, durch die Mitteilung M aus 4.7.2.2 werde eine

einstellige ganzzahlige Funktion natürlicher Zahlen beschrieben, zu einem Widerspruch führt.

4.8 Schließlich wird gezeigt, daß der Beweis der Überabzählbarkeit der Mengen natürlicher Zahlen einen Widerspruch enthält.

4.8.1 Zunächst wird der übliche Beweis formuliert:

4.8.1.1 Es seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ Mengen natürlicher Zahlen, also Elemente der Potenzmenge. Wäre die Potenzmenge abzählbar, dann gäbe es eine eineindeutige Zuordnung $\bigwedge_n n \leftrightarrow \mathcal{M}_n$.

4.8.1.2 Nun bilde eine Menge
$\bar{\mathcal{M}} = \{ n \mid n \notin \mathcal{M}_n \}$

4.8.1.3 Für $\bar{n} \leftrightarrow \bar{\mathcal{M}}$ gilt nun
$\bar{n} \in \bar{\mathcal{M}} \rightarrow \bar{n} \notin \bar{\mathcal{M}}$,
$\bar{n} \notin \bar{\mathcal{M}} \rightarrow \bar{n} \in \bar{\mathcal{M}}$
und dies ist ein Widerspruch, so daß es kein $\bar{n}$ gibt, dem $\bar{\mathcal{M}}$ zugeordnet wird, woraus die Unvollständigkeit der Zuordnung und damit die Überabzählbarkeit der Potenzmenge folgt.

4.8.2 Entsprechend 4.6.2 kann gezeigt werden, daß die Beweisführung nach 4.8.1 einen Widerspruch enthält.

4.8.2.1 Die Mengen $\mathcal{M}_n$ werden entsprechend ihrem Platz in der Universalanordnung numeriert und angeordnet. Weiters bildet man die eineindeutige Zuordnung $n \leftrightarrow \mathcal{M}_n$.

4.8.2.2 Nun bilde eine Mitteilung M bestehend aus der vollständigen Definition der Anordnung $\mathcal{M}_n$ und aus der Definition von $\bar{\mathcal{M}}$ durch $\bar{\mathcal{M}} = \{ n \mid n \notin \mathcal{M}_n \}$.

4.8.2.3 Die Beweisführung nach 4.8.1 beruht auf der Behauptung, durch die Mitteilung M nach 4.8.2.2 werde eine Menge von natürlichen Zahlen beschrieben. In diesem Fall ist diese Menge in der Universalanordnung und damit in der Anordnung nach 4.8.2.1 enthalten, woraus $\bigvee_m \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_m$ folgt.

4.8.2.4 Aus 4.8.2.1 und 4.8.2.3 folgt $m \leftrightarrow \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_m$. Wegen der Definition von $\bar{\mathcal{M}}$ nach 4.8.2.2 gilt nun
$m \in \mathcal{M}_m \rightarrow m \notin \bar{\mathcal{M}}_m$,
$m \notin \mathcal{M}_m \rightarrow m \in \mathcal{M}_m$,
so daß die Behauptung, durch die Mitteilung M aus 4.8.2.2 werde eine Menge natürlicher Zahlen beschrieben, zu einem Widerspruch führt.

4.9 Der Widerspruch in den Beweisführungen nach 4.6.1, 4.7.1 und 4.8.1 folgt stets durch den Nachweis, daß bereits die Definition des angeblich in der vollständigen Anordnung nicht enthaltenen Denkobjektes einen Widerspruch enthält.

5. Die Anwendung des Auswahlaxioms auf eine Menge von Denkobjekten, die in der Universalanordnung nicht enthalten sind, führt zu einem Widerspruch.

5.1 Wie bereits gezeigt, sind alle Denkobjekte, die isoliert betrachtet werden können, in der Universalanordnung enthalten, doch können Mengen solcher Denkobjekte widerspruchsfrei eingeführt werden.

5.1.1 Die Behauptung: "Es gibt reelle Zahlen, die nicht in der Universalanordnung enthalten sind" führt für sich allein zu keinem Widerspruch, so daß einer axiomatischen Einführung solcher Zahlen nichts im Wege steht.

5.1.2 Reelle Zahlen nach 5.1.1 können allerdings in keiner Weise durch eine Mitteilung einzeln beschrieben werden, da sie ansonsten in der Universalanordnung enthalten wären.

5.2 Wird das Auswahlaxiom auf eine derartige Menge angewendet, dann muß dies in Raum und Zeit geschehen, so daß der Anwendung des Auswahlaxioms ein RZE, z.B. das RZE Nr.N, zugeordnet werden kann.

5.3 Man bildet nun eine Mitteilung M, die eine Beschreibung der Menge nach 5.1 sowie den Satz: "Betrachte das Denkobjekt, das im RZE Nr.N durch Anwendung des Auswahlaxioms ausgewählt wurde" enthält.

5.4 Die Mitteilung M aus 5.3 ist in der Universalschrift enthalten. Behauptet man, daß durch M ein Denkobjekt beschrieben wurde, dann ist für dieses Denkobjekt ein Platz in der Universalanordnung reserviert, was in Widerspruch zur Definition der Menge nach 5.1 steht, wonach es sich um Denkobjekte handelt, die nicht in der Universalanordnung enthalten sind.

5.5 Da eine Abspaltung einzelner Denkobjekte aus Mengen nach 5.1 somit in keiner Weise möglich ist, erscheint ihre Betrachtung sinnlos; für sie gilt mit WITTGENSTEIN: "Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen."

ÜBER EINE UNIVERSALSCHRIFT

Einleitung

In der Mengenlehre wird eine Voraussetzung stillschweigend als erfüllt angesehen, die für wichtige Aussagen wesentlich ist, aber nicht immer erfüllt sein muß. Es handelt sich um die Annahme, daß es stets möglich ist, zu jeder beliebigen vorgegebenen Menge ein weiteres Element hinzuzufügen. Auf dieser Annahme beruht etwa die Möglichkeit, von Mengen beliebiger Mächtigkeit zu Mengen höherer Mächtigkeit aufzusteigen.

Im folgenden führen wir eine sogenannte Universalschrift ein, deren wichtigste Eigenschaft darin liegt, daß in ihr auch Ort und Zeitpunkt berücksichtigt sind, an und in dem die Schrift gelesen wird. Eine mit Hilfe dieser Universalschrift beschriebene Menge kann nun nicht mehr ohne weiteres stets, also "jederzeit", erweitert werden, da Ort und Zeitpunkt der Erweiterung in der Universalschrift zum Ausdruck gebracht werden müssen. Die Menge aller in der Universalschrift beschreibbaren Objekte kann daher nicht mehr erweitert werden. Da auch gezeigt wird, daß die Menge aller in der Universalschrift beschreibbaren Objekte abzählbar angeordnet werden kann, versagen die Beweise über die Existenz von Mengen überabzählbarer Mächtigkeit. Dies läßt sich insbesondere am Beispiel der Menge der reellen Zahlen zeigen.

1. Die Bildschirmmitteilung

Eine wesentliche Eigenschaft von Aussagen der Geisteswissenschaften und der Mathematik ist es, daß sie in schriftlicher Form dargestellt werden können. Diese Eigenschaft, der ansonsten nur mehr oder weniger praktische Bedeutung zukommt - wissenschaftliche Arbeiten werden ja üblicherweise in schriftlicher Form veröffentlicht - wird in die folgenden Überlegungen wesentlich eingehen. Aus diesem Grunde wird durch die folgende Einführung einer "Universalschrift" eine gewisse Ordnung in die Menge der schriftlichen Aussagen gebracht.

Wir beschränken uns auf solche schriftliche Aussagen, die im Prinzip auf einem ausreichend großen Fernsehbildschirm dargestellt werden können. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden quadratische "Bildschirmmitteilungen" betrachtet.

Eine Bildschirmmitteilung ist ein Raster aus nn Elementarquadraten. Jedes Elementarquadrat hat die Seitenlänge 1/10 mm und ist entweder weiß oder schwarz. n durchläuft die Menge aller natürlichen Zahlen.

Für $n = 1$ gibt es offenbar genau zwei Bildschirmmitteilungen. Da die Mitteilung in diesem Fall aus einem einzigen Elementarquadrat besteht, kann dieses nämlich entweder weiß oder schwarz sein. Für $n = 2$ gibt es 16 solche Bildschirmmitteilungen. In diesem Fall besteht die Bildschirmmitteilung aus 4 Quadraten, von denen jedes weiß oder schwarz sein kann, also insgesamt 2^4 Möglichkeiten.

Es ist leicht einzusehen, daß jede schriftliche Mitteilung in Form einer derartigen Bildschirmmitteilung dargestellt werden kann, da solche Mitteilungen aus Buchstaben, Zeichen und sonstigen Symbolen bestehen, die durch schwarze Elementarquadrate der Seitenlänge 1/10 mm auf weißem Grund mit genügender Genauigkeit dargestellt werden können. Die Menge $\{M\}$ aller derartigen Bildschirmmitteilungen M kann nun leicht abzählbar angeordnet werden, indem man in jeder Mitteilung einem weißen Elementarquadrat die Ziffer 1 und einem schwarzen Elementarquadrat die Ziffer 2 zuordnet und jeder Mitteilung jene Zahl zuordnet, die man erhält, wenn die Einser und Zweier zeilenweise gelesen werden. Aus der abzählbaren Anordnung der so erhaltenen Zahlen ergibt sich eine abzählbare Anordnung der Mitteilungen.

Man kann sich nun jede Mitteilung realisiert denken als ein quadratisches Stück Papier der Seitenlänge $\frac{n}{10}$ mm, dessen Oberfläche

mit weißen bzw. schwarzen Elementarquadraten der Seitenlänge $\frac{1}{10}$ mm bedeckt ist. Die Menge dieser Mitteilungen, ein unendlicher Stoß von immer größer werdenden Papierstücken, enthält in einem gewissen Sinne "alle" Mitteilungen. Beispielsweise enthält er sämtliche bereits geschriebenen, aber auch sämtliche in Zukunft noch zu schreibenden wissenschaftlichen Arbeiten. Auch die vorliegende Arbeit kommt in der Menge dieser Mitteilungen vor, und zwar sogar unendlich oft, denn durch eine Verdoppelung, Verdreifachung usw. der Mitteilungen vom Maße n^2 auf das Maß $(2n)^2$, $(3n)^2$ usw. bleibt der Sinn der Mitteilung - soferne keine absoluten Maßstäbe auftreten - unverändert, ebenso wie der Sinn eines Satzes von der Größe der verwendeten Buchstaben unabhängig ist.

Es erscheint daher von einem gewissen Standpunkt aus berechtigt, die Menge der Mitteilungen als "Universalschrift" zu bezeichnen.

2. Die Universalschrift

Die Universalschrift eignet sich insbesondere zur Beschreibung beliebiger Objekte unseres Denkens. Dazu gehören auch alle jene Objekte, die Gegenstand mathematischer Untersuchungen sind. Wir wollen uns hier auf reelle Zahlen beschränken, aber gleich an dieser Stelle anmerken, daß die für reelle Zahlen im folgenden angestellten Überlegungen prinzipiell für alle Objekte unseres Denkens gelten.

Reelle Zahlen lassen sich auf verschiedene Weise in der Universalschrift darstellen. So bezeichnet etwa "1", "eins", "$\frac{5}{5}$" usw. die Zahl 1. Sicher sind alle endlichen natürlichen Zahlen, aber auch alle endlichen Dezimalzahlen in der Universalschrift darstellbar.

Bleiben wir im Bereich der reellen Zahlen, dann kann die Frage der Darstellbarkeit einer Zahl in der Universalschrift nur bei unendlichen Dezimalzahlen problematisch erscheinen. Die Größe der Mitteilungen M, also die Seitenlänge $\frac{n}{10}$ mm der quadratischen Mitteilung, ist zwar unbegrenzt, aber jedenfalls endlich. Auf einem derartigen endlichen Quadrat läßt sich aber nur eine endliche Menge von Schriftzeichen unterbringen. Die Dezimalzahl 0'333....., als unendliche Dezimalzahl angeschrieben, ist in der Universalschrift nicht darstellbar. Der Leser dieser Zeilen weiß aber bereits, daß es sich um die Dezimalzahl $0'\dot{3} = 1/3$ handelt, obwohl ihm nur eine endliche Mitteilung, nämlich der bisherige Teil dieser Arbeit, vorliegt. Dies offenbar deshalb, weil auch unendliche Dezimalzahlen in endlicher Form angeschrieben werden können, wobei wir vorläufig die Frage, ob und in welchem Sinn "alle" Dezimalzahlen in endlicher Form dargestellt werden können, noch offenlassen.

Als weiteres Beispiel führen wir zunächst die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, an, die etwa in der Form

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

dargestellt werden kann, wobei wir bemerken, daß die Bedeutung des Summenzeichens sowie der Summierung bis ins Unendliche ebenfalls durch eine endliche Mitteilung in der Universalschrift erklärt werden kann.

Aber auch nicht berechenbare Zahlen können in der Universalschrift dargestellt werden, wie etwa die unendliche Dezimalzahl $0'\alpha_1\alpha_2\alpha_3.....$, wobei $\alpha_n = 0$, wenn die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ eine ganzzahlige Lösung in a, b und c besitzt, und $\alpha_n = 1$ sonst. Obwohl diese Zahl möglicherweise unberechenbar ist, läßt sie sich doch definieren und in der Universalschrift darstellen.

Aber in der Universalschrift lassen sich Zahlen auch noch wesentlich allgemeiner und unbestimmter definieren, ohne daß die Eindeutigkeit dieser Definition darunter leidet. So beginnen etwa mathematische Beweise mit der Formulierung: "Es sei x eine Zahl aus der Menge X .....". Im weiteren Verlauf des Beweises wird mit diesem x so wie mit einer tatsächlichen Zahl gerechnet, ohne daß x näher spezifiziert wird. Trotzdem ist es für jeden Leser dieses Beweises klar, daß es sich bei x um eine feste, für die Dauer der Beweisführung jedenfalls unveränderliche Zahl handelt. Durch die oben erwähnte Beschreibung: "Es sei x eine Zahl aus der Menge X ....." wird für die Dauer der Beweisführung eine Zahl eindeutig ausgewählt, ohne daß sie jedoch näher bestimmt würde.

Allen diesen Darstellungen von Zahlen durch Mitteilungen aus der Universalschrift ist gemeinsam, daß für den Leser der Mitteilung im Zeitpunkt des Lesens (die Bedeutung des Heraushebens des Lesers und des Zeitpunktes des Lesens wird später noch erläutert) dieser Mitteilung eine Zahl eindeutig zugeordnet ist. Um die verschiedenen Ausdrücke

wie Beschreibung, Darstellung, Definition usw. zu vereinheitlichen, wollen wir im folgenden die Sprachregelung treffen, daß eine Zahl durch eine solche Mitteilung eindeutig "beschrieben" wird.

Tatsächlich lesbare Mitteilungen sind nicht nur endlich, sondern auch beschränkt, da es einer Person im Laufe ihres zeitlich beschränkten Lebens nur möglich ist, dem Umfang nach beschränkte Mitteilungen zu lesen. Trotzdem wird man behaupten dürfen, daß etwa die Zahl $10^{10^{10}}$ wenigstens prinzipiell als Dezimalzahl angeschrieben werden kann. Da die Mitteilungen der Universalschrift nur als endlich, nicht aber als beschränkt vorausgesetzt sind, findet sich eine Beschreibung der Zahl $10^{10^{10}}$ nicht nur in der hier verwendeten Form, sondern auch als Dezimalzahl in der Universalschrift, und zwar - wie bereits erwähnt - sogar unendlich oft. Die Universalschrift enthält offenbar sowohl die aktual anschreibbaren Zahlen als auch die nur potentiell anschreibbaren Zahlen, die aus Gründen der Endlichkeit, etwa wegen der auf der Erde zur Verfügung stehenden Masse, nicht tatsächlich angeschrieben werden können.

3. Die erweiterte Universalschrift

Die Bedeutung eines Schriftzeichens bzw. allgemeiner eines Symbols hängt von der verwendeten Schrift, von der verwendeten Sprache ab. Vielleicht bedeutet das Zeichen "1" bzw. das Wort "eins" einmal etwas völlig anderes, so wie für jemanden, der der chinesischen Sprache nicht mächtig ist, die Schriftzeichen dieser Sprache entweder keine Bedeutung haben oder eine andere als für einen Chinesen. Um nun auch die Möglichkeit verschiedener Bedeutungen ein und derselben Mitteilung der Universalschrift zu berücksichtigen, wollen wir uns überlegen, daß eine Mitteilung offenbar nur dann sinnvoll ein Denkobjekt oder im speziellen eine Zahl beschreiben kann, wenn im Zeitpunkt des Lesens dieser Mitteilung der Leser genau eine Zahl der Mitteilung zuordnet. Es ist also ohne weiteres möglich, daß zwei verschiedene Personen ein und derselben Mitteilung zwei verschiedene Zahlen zuordnen bzw. daß ein und dieselbe Person ein und derselben Mitteilung in verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Zahlen zuordnet. Letzteres etwa bei der Mitteilung "Es sei x eine Zahl aus der Menge X...." wenn es sich um verschiedene Mengen bzw. um verschiedene Beweise handelt

Diese mögliche Mehrdeutigkeit prinzipiell aller Mitteilungen der Universalschrift scheint zunächst einen starken Einwand gegen die Brauchbarkeit des Konzeptes der Universalschrift zu bedeuten. Diesem Einwand kann jedoch durch eine Ergänzung des Konzeptes der Universalschrift Rechnung getragen werden. Für die späteren Überlegungen reicht es völlig aus vorauszusetzen, daß es eine bestimmte Person gibt, bzw. daß eine bestimmte Person denkbar ist, für die in einem bestimmten Zeitpunkt durch eine Mitteilung eine Zahl eindeutig beschrieben wird. Mitteilungen, die keinr denkbaren Person in keinem denkbaren Zeitpunkt eine Zahl beschreiben, brauchen nicht betrachtet zu werden. Man überlegt sich allerdings leicht, daß es in keinem Zeitpunkt zulässig wäre, auf Grund dieser Überlegung eine Mitteilung für alle Zeitpunkte auszuschalten. Wohl aber wäre es für den Autor dieser Zeilen im Zeitpunkt der Niederschrift zulässig, die Mitteilung, die nur aus einem weißen Elementarquadrat besteht, auszuschließen, da sie im Zeitpunkt der Niederschrift für ihn keine Zahl beschreibt.

Gegenstand der folgenden Überlegungen wird vor allem die eindeutige Zuordnung von Zahlen zu Mitteilungen sein. Da eine solche eindeutige Zuordnung grundsätzlich nur für eine bestimmte Person und für einen bestimmten Zeitpunkt möglich erscheint, muß das Konzept der Universalschrift so erweitert werden, daß für jede Person und für jeden Zeitpunkt eine eigene komplette Universalschrift zur Verfügung steht. Zur Kennzeichnung einer Mitteilung aus diesem erweiterten Konzept ist daher die Kennzeichnung der Mitteilung aus der ursprünglichen Universalschrift zuzüglich der Kennzeichnung der Person und des Zeitpunktes, in dem diese Person die Mitteilung liest (oder lesen könnte) notwendig.

Um dies zu ermöglichen, führen wir sogenannte Raum-Zeit-Elemente ein. Als Raum-Zeit-Element bezeichnen wir einen Würfel mit der Seitenlänge der Elementarlänge und mit der Dauer der Elementarzeit. Für jede denkbare Person und für jeden denkbaren Zeitpunkt, in dem diese Person eine Mitteilung liest, gibt es dann mindestens ein Raum-Zeit-Element, das dieser Person und der Zeitspanne des Lesens der Mitteilung zugeordnet werden kann. Dies folgt einfach daraus, daß jede Person einen Raum einnimmt, der größer ist als ein Würfel

mit der Seitenlänge der Elementarlänge und jedes Lesen einer Mitteilung eine Zeitspanne benötigt, die größer ist als die Elementarzeit.

Es ist daher stets möglich, zwei verschiedene Personen, die die selbe Mitteilung lesen oder auch einer Person, die die selbe Mitteilung in zwei verschiedenen Zeitpunkten liest, zwei verschiedene Raum-Zeit-Elemente zuzuordnen. Umgekehrt ist durch die Angabe eines Raum-Zeit-Elementes höchstens eine Person und höchstens ein Lesevorgang bestimmt.

Wir bilden nun eine erweitrte Universalschrift, indem wir jedem Raum-Zeit-Element einen kompletten Satz von Mitteilungen der ursprünglichen Universalschrift zuordnen.

Es bedarf keiner weiteren Erörterung, daß sich die Raum-Zeit-Elemente abzählbar anordnen lassen. Die erweiterte Universalschrift enthält zu jedem Raum-Zeit-Element jede Mitteilung genau ein Mal. Es können daher auch die Mitteilungen der erweiterten Universalschrift abzählbar angeordnet werden.

Man kann sich die Mitteilungen aus der erweiterten Universalschrift zusammengesetzt denken aus einer ursprünglichen Bildschirmmitteilung, ergänzt um die Kennziffer des Raum-Zeit-Elementes in der abzählbaren Anordnung dieser Raum-Zeit-Elemente.

In gewissem Sinne ist allerdings auch die erweiterte Universalschrift in der ursprünglichen Universalschrift enthalten. Die ursprüngliche Universalschrift enthält nämlich zu jeder Mitteilung M auch diese Mitteilung, ergänzt um den Satz "Diese Mitteilung ist dem Raum-Zeit-Element Nr. ..... zugeordnet." Beschränkt man sich in der Universalschrift auf jene Mitteilungen, die eine derartige Ergänzung enthalten, wobei an die Stelle der fünf Punkte der Ergänzung der Reihe nach alle natürlichen Zahlen zu setzen sind, dann erhält man nur mehr Mitteilungen, die durch ihren letzten Satz einem Raum-Zeit-Element zugeordnet sind, wie dies in der erweiterten Universalschrift gefordert wird.

4. <u>Die Universalanordnung</u>

Die Universalschrift ermöglicht in ihrer erweiterten Form eine Anordnung von Denkobjekten, insbesondere von reellen Zahlen nach neuartigen Gesichtspunkten. Da die Mitteilungen der erweirten

Universalschrift abzählbar angeordnet werden können, können alle jene reellen Zahlen, die durch eine Mitteilung der Universalschrift eindeutig beschrieben werden, abzählbar angeordnet werden. Da die Universalschrift aber auch Mitteilungen enthält, deren Bedeutung erst in ferner Zukunft - oder auch in ferner Vergangenheit - und durch völlig unbekannte und gegenwärtig nicht befragbare Personen enthüllt werden könnte, kann eine derartige Anordnung in keinem Zeitpunkt auch nur beliebig weit vervollständigt werden.

Eine Anordnung von reellen Zahlen nach den hier dargelegten Grundsätzen enthält aber jedenfalls alle reellen Zahlen, die sich prinzipiell in irgendeinem Zeitpunkt durch irgendeine Person in Form irgendeiner endlichen, aber beliebig umfangreichen Mitteilung darstellen lassen.

Etwas allgemeiner gilt dies für alle Objekte unseres Denkens. Die abzählbare Anordnung der Mitteilungen der erweiterten Universalschrift ermöglicht es, alle Objekte unseres Denkens, die in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person ~~oder~~ dann irgendeine Mitteilung eindeutig beschrieben werden können, abzählbar anzuordnen. Aus diesem Grunde soll jede Anordnung von Objekten auf Grund einer Anordnung der Mitteilungen der erweiterten Universalschrift als Universalanordnung bezeichnet werden.

Etwas formaler kann eine Universalanordnung folgendermaßen beschrieben werden. Es gelte:

$|"...",P,t,M| \Leftrightarrow$ eine Person P ist in einem Zeitpunkt t bereit, auf Grund der Mitteilung M die Aussage "..." als wahr zu bezeichnen.

Beispielsweise kann als Mitteilung M eine Mitteilung der Gestalt: "$x = 0'a_1 \ldots a_n \wedge \bigwedge_m a_m \in (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$", als Person der Autor der vorliegenden Arbeit, als Zeitpunkt ein Zeitpunkt aus dem für das Schreiben dieser Arbeit notwendigen Zeitintervall und als Aussage "..." = "x ist eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1" gewählt werden.

Wir wollen nun eine Universalanordnung von Elementen x einer bestimmten Menge X vornehmen. Beispielsweise sei x eine beliebige Dezimalzahl zwischen 0 und 1 und X die Menge aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Die Aussage "$x \in X$" bedeutet daher, daß x eine in

dieser Universalanordnung enthaltene Dezimalzahl zwischen 0 und 1 ist. Für die Universalanordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, UA(DZ), gilt daher:

$\bigvee_P \bigvee_t \bigvee_M |x \in X,P,t,M| \Leftrightarrow$ x ist eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 aus UA(DZ).

UA(DZ) enthält also auch Elemente x, die von einer Person P irgendeinmal fälschlich (irrtümlich oder absichtlich) als der Menge X zugehörig bezeichnet werden. Es genügt sogar die grundsätzliche Bereitschaft von P, diese Zugehörigkeit als wahr zu bezeichnen. In UA(DZ) können daher auch Elemente auftauchen, deren Definition falsch bzw. sogar in sich widerspruchsvoll ist. Behauptet etwa eine Person P in irgendeinem Zeitpunkt t, daß durch die Mitteilung

$\bar{M}$: = "die größte reelle Zahl kleiner als 1/2 und größer als 3/4" eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben wird, dann wird in UA(DZ) für das durch $\bar{M}$ für P in t beschriebene Objekt ein Platz reserviert, wenn auch weder der Autor dieser Arbeit noch wahrscheinlich je irgendein Leser die Meinung von P in t teilen wird. Die hier definierte Mitteilung $\bar{M}$ muß natürlich in Form einer quadratischen Bildschirmmitteilung vorgestellt werden.

Die Frage, welche in einer Universalanordnung angeordneten Objekte tatsächlich sinnvoll definiert sind, soll und kann hier nicht geprüft werden. Wir halten aber fest, daß jedes für eine konkrete Person P in irgendeinem Zeitpunkt t konkret oder potentiell durch irgendeine Mitteilung M eindeutig beschriebene Objekt jedenfalls in der Universalanordnung enthalten ist.und alle Objekte der Universalanordnung abzählbar angeordnet sind. Es ist aber prinzipiell nicht möglich, in irgendeinem Zeitpunkt allgemein, d.h. für alle Personen P und für alle Zeitpunkte t, zu entscheiden, welche Objekte der Universalanordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 tatsächlich Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 sind. Da die Menge der Objekte dieser Universalanordnung sicher nicht kleiner ist als die Menge der in dieser Universalanordnung enthaltenen Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, folgt daraus, daß die Mächtigkeit der Menge der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 aus der Universalanordnung nicht größer ist als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen.

5. Die Problematik des Cantor'schen Beweises der Überabzählbarkeit

Wir betrachten nun die Universalanordnung aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Diese Anordnung enthält also genau jene Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, die in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person durch irgendeine Mitteilung eindeutig beschrieben werden. Wir heben hervor, daß diese Art der Anordnung Begriffe wie Sprache, Metasprache usw. vermeidet und lediglich auf das Verhalten einer Person beim Lesen einer Mitteilung in einem bestimmten Zeitraum abgestellt ist.

Offenbar sind alle Dezimalzahlen aus dieser Universalanordnung abzählbar angeordnet.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie weit diese Universalanordnung "vollständig" ist, wie weit sie also "alle" Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 enthält.

Um diese Frage zu behandeln, teilen wir die Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 in zwei Klassen. Klasse 1 enthält alle Dezimalzahlen aus der oben beschriebenen Universalanordnung, Klasse 2 alle übrigen Dezimalzahlen. Wir interessieren uns vor allem für diese Klasse 2 und halten fest, daß die Annahme von Dezimalzahlen in Klasse 2 an sich zu keinem Widerspruch führt. Wie weit ist aber eine solche Annahme sinnvoll?

Zunächst enthält Klasse 2 sicher keine "beschreibbaren" Zahlen, wenn man "beschreibbar" als "durch eine Mitteilung der Universalschrift beschreibbar" versteht. Wie steht es aber nun mit der bekannten Cantor'schen Diagonalzahl aus dem Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nach Cantor ? Dieser Beweis kann bekanntlich folgendermaßen geführt werden:

Es sei

$$a_1 = 0'a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\ldots$$
$$a_2 = 0'a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0'a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots\ldots$$
$$\vdots$$

eine abzählbare Anordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Nun bilde man eine Dezimalzahl

$$b = 0'b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\ldots$$

mit

$$b_n = 1 \text{ für } a_{nn} \neq 1$$

und

$$b_n = 2 \text{ für } a_{nn} = 1.$$

Offenbar gilt $\bigwedge_n b \neq a_n$ wegen $\bigwedge_n b_n \neq a_{nn}$. Da b eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 ist, folgt daraus die Unvollständigkeit der Anordnung.

Wie weit kann die Cantor'sche Beweisführung bei Zugrundelegung der Universalanordnung noch aufrecht erhalten werden?

Die Cantor'sche Diagonalzahl b ist zweifellos in Form einer endlichen Mitteilung beschreibbar. Legt man eine konkrete Anordnung von Dezimalzahlen $a_1, a_2, \ldots\ldots$, zugrunde, dann ist durch eine Mitteilung, welche diese Anordnung so wie das Konstruktionsprinzip von b beschreibt, eine konkrete Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben. Die konkrete Anordnung ist durch die in dieser Arbeit dargelegte Universalanordnung beschrieben unter der Voraussetzung, daß – was nur der Einfachheit halber nicht vorgenommen wurde – eine konkrete Anordnung der Raum-Zeit-Elemente gewählt wird.

An den Leser dieser Arbeit wird nun die Frage gestellt, ob durch b eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben wird. Verneint er diese Frage, dann ist für ihn im Zeitpunkt des Lesens dieser Arbeit der Cantor'sche Beweis der Überabzählbarkeit bzw. der Beweis der Unvollständigkeit der Universalanordnung gescheitert, denn dann ist eben für ihn im Zeitpunkt des Lesens b keine Dezimalzahl zwischen 0 und 1. Bejaht er hingegen diese Frage, dann gibt es also eine Person, nämlich den Leser, für den in einem bestimmten Zeitpunkt, nämlich einem beliebigen Zeitpunkt aus dem für das Lesen notwendigen Zeitintervall, eine Mitteilung, nämlich die vorliegende Darstellung, eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1, nämlich b, eindeutig bezeichnet. Damit ist aber per definitionem b eine Zahl aus Klasse 1. Die b beschreibende Mitteilung führt zusammen mit dem durch den Leser festgelegten Raum-Zeit-Element zu einem für b reservierten Platz in der Universalanordnung. Dann gibt es aber <u>nach Definition der Anordnung</u> ein n mit $b = a_n$. Nun beruht die Definition von b einerseits auf der Definition der Anordnung und andererseits auf der Definition der einzelnen b_n. Aus diesen beiden Definitionen folgt aber

$$\bigvee_{n} b_n = a_{nn} \wedge b_n \neq a_{nn}$$

und dies ist ein Widerspruch. Die Behauptung, durch b in der hier definierten Form werde eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben, führt daher zu einem Widerspruch und darf somit vom Leser nicht aufgestellt werden.

Der Widerspruch in der Cantor'schen Beweisführung konnte deshalb herbeigeführt werden, weil in der Universalanordnung grundsätzlich für alle Mitteilungen und für alle Raum-Zeit-Elemente ein Platz reserviert ist, der genau dann besetzt wird, wenn für eine Person in einem Zeitpunkt durch eine Mitteilung ein entsprechendes Denkobjekt, hier eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1, eindeutig beschrieben wird. Der sonst die Unvollständigkeit der Anordnung beweisende Widerspruch führt für die hier gewählte Anordnung zu einem Widerspruch in der Definition der Diagonalzahl. Damit ist der Beweis der Unvollständigkeit der Universalanordnung mißglückt.

In analoger Weise läßt sich zeigen, daß bei Zugrundelegung der Universalanordnung auch für andere Elemente als für Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 der Beweis der Überabzählbarkeit durch Konstruktion eines in der Universalanordnung angeblich nicht enthaltenen Elementes zu einem Widerspruch in der Definition dieses Elementes führt.

6. Die Abzählbarkeit aller Denkobjekte

Mit Hilfe der Universalanordnung kann zwar gezeigt werden, daß die Definition eines angeblich neuen Elementes einen Widerspruch enthält, doch führt die Annahme von Dezimalzahlen der Klasse 2 an sich noch zu keinem Widerspruch. Das gleiche gilt für eine analoge Klasseneinteilung beliebiger Denkobjekte. Alle Objekte unseres Denkens, insbesondere aber Objekte der Mathematik, lassen sich in Klasse 1 oder Klasse 2 einordnen, je nachdem, ob in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person irgendeine Mitteilung dieses Denkobjekt eindeutig beschreibt oder nicht. Die Annahme der "Existenz" (in welchem Sinne immer) von Denkobjekten der Klasse 2 führt an sich zu keinem Widerspruch. Sie ist jedoch nicht sehr sinnvoll, wie folgende einfache Überlegung zeigt.

Angenommen, wir sprechen von Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, die in der Universalanordnung nicht enthalten sind, also der Klasse 2 zugehören. Wir haben zur Kenntnis genommen, daß die Konstruktion

einer derartigen Zahl - wie z.B. nach Cantor - nicht möglich ist, aber wir nehmen an, "es gibt" solche Dezimalzahlen aus Klasse 2. Es zeigt sich nun, daß wir von diesen Dezimalzahlen zwar als Menge sprechen können, sie sich jedoch in keiner Weise isolieren lassen. Wollte man mit ihnen Mathematik treiben, dann müßte man Sätze bilden können wie: "Es sei x eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 aus Klasse 2 .... Es muß nun für irgendeine Person in irgendeinem Zeitpunkt sinnvoll sein, diese Zahl x als Dezimalzahl zwischen 0 und 1 zu betrachten. Damit ist sie aber bereits durch diese Mitteilung "beschrieben". Sie kann in diesem Fall sogar für beliebige Personen beschrieben werden, etwa durch einen Satz der Gestalt: "Die Zahl, die die Person ... im Zeitpunkt ... aus Klasse 2 ausgewählt hat."

Es zeigt sich also, daß zwar die Annahme von Zahlen oder allgemeiner von Denkobjekten der Klasse 2 zu keinem Widerspruch führt, hingegen jeder Versuch, ein Element aus Klasse 2 isoliert zu betrachten, es auszuwählen, ja sogar nur an dieses Element als einzelnes Objekt zu denken, zu einem Widerspruch in der Annahme führt, es handle sich um ein Objekt der Klasse 2. Die Unmöglichkeit, dieses Element auch nur gedanklich als Einzelobjekt zu betrachten, folgt unmittelbar aus der Möglichkeit, eine Mitteilung zu bilden: "Das Element, an das die Person ... im Zeitpunkt ... gedacht hat".

Es ist daher nicht sinnvoll, von der "Existenz" von Denkobjekten der Klasse 2 zu sprechen.

Schlußbemerkungen

Man kann sich nun die Frage vorlegen, inwieweit aus den vorstehenden Ausführungen Aussagen über Mathematik gewonnen werden können. Dabei ist vor allem auf die Tatsache Bedacht zu nehmen, daß die Objekte der Universalanordnung abzählbar angeordnet werden können. Wir gehen nun von dem Satz aus, daß die Mächtigkeit des Kontinuums größer ist als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen. Nun teilen wir die Menge der reellen Zahlen, der offenbar die Mächtigkeit des Kontinuums zukommt, in zwei Klassen. In Klasse 1 fassen wir alle jene reellen Zahlen zusammen, die im Sinne von Ziffer 2 in der Universalschrift "beschrieben" werden können. Dabei berücksichtigen wir, daß im Sinne von Ziffer 3 auch die "erweiterte

Universalschrift" in der Universalschrift enthalten ist. In Klasse 2 fassen wir alle übrigen reellen Zahlen zusammen. Da die durch die Universalschrift beschreibbaren Zahlen abzählbar angeordnet werden können, und zwar in der Universalanordnung nach Ziffer 4, ist die Menge der reellen Zahlen aus Klasse 1 sicher nicht von größerer Mächtigkeit als die Menge der natürlichen Zahlen. Da weiters alle natürlichen Zahlen in Form einer Bildschirmmmitteilung gemäß Ziffer 1 beschrieben werden können, ist die Menge der reellen Zahlen aus Klasse 1 gleich mächtig der Menge der natürlichen Zahlen.

Für den Mathematiker stehen nun die ein Kontinuum bildenden reellen Zahlen grundsätzlich alle in gleicher Weise zur Verfügung, d.h. wenn ein Mathematiker Sätze bildet, die mit den Worten: "Es sei x eine reelle Zahl ..." beginnen, dann kann x grundsätzlich jede beliebige reelle Zahl sein. Es ist also insbesondere gleichgültig, ob x aus Klasse 1 oder aus Klasse 2 ist.

In Ziffer 6 wurde aber dargelegt, daß Zahlen, die an irgendeinem Ort und in irgendeinem Zeitpunkt durch die Worte: "Es sei x eine reelle Zahl ..." beschrieben werden, eben durch diese Beschreibung, also eben dadurch, daß an irgendeinem festen Ort und in irgendeinem festen Zeitpunkt an sie gedacht wird, daß sie also Denkobjekt sind, zu Denkobjekten der Klasse 1 werden, bzw. im Sinne unserer Ausführungen in diesen Schlußbemerkungen zu reellen Zahlen der Klasse 1 werden. Der Mathematiker, der mit reellen Zahlen arbeitet, kann dies also nur, wenn er sich auf reelle Zahlen der Klasse 1 beschränkt, also auf reelle Zahlen aus einer Menge mit der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen.

Die Annahme,"es gibt" reelle Zahlen der Klasse 2, oder anders ausgedrückt, es gibt außer den abzählbar vielen reellen Zahlen der Klasse 1 noch reelle Zahlen aus einer Menge von reellen Zahlen, deren Mächtigkeit größer als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen ist, führt für sich allein zu keinem Widerspruch. Nur kann mit solchen "Zahlen" eben keine Mathematik betrieben werden, weil sie sich im Sinne von Ziffer 6 einer isolierten gedanklichen Erfassung entziehen und insbesondere für sie Sätze der Gestalt: "Es sei x eine reelle Zahl der Klasse 2 ..." zu einem Widerspruch führen, da gerade durch die Möglichkeit, einen solchen Satz zu bilden, die reelle Zahl per definitionem zu einer reellen Zahl der Klasse 1 wird.

Damit ist gezeigt, wie aus den vorstehenden Ausführungen eine relevante Aussage für die Mathematik gewonnnen werden kann.

Der Gegensatz zur "scholastischen" Mathematik, in der Sätze wie: "Es sei x eine reelle Zahl der Klasse 2 ..." sinnvoll sind, beruht letztlich darauf, daß auch Mathematik nur in Raum und Zeit betrieben werden kann, daß mathematische Sätze nur in Raum und Zeit formuliert und gedacht werden können, eine Voraussetzung, die in die scholastische Mathematik nirgends eingeht.

TELEMATHEMATIK

Es seien Rechenautomaten gegeben, die genügend komplex gestaltet sind, um mathematische Probleme zu lösen und um selbst mathematische Probleme zu formulieren. Es sei zulässig, daß sich diese Rechenautomaten bei der Formulierung mathematischer Probleme, aber gegebenenfalls auch bei der Lösung zufallsgesteuerter Prozesse bedienen.

Die Ein- und Ausgabe von Informationen werde von den Rechenautomaten durch Datenträger vorgenommen, die wir uns etwa als Magnetbänder vorstellen können. Wir bezeichnen die auf einem derartigen Magnetband enthaltene Information als "Aussage". Es seien stets beliebig lange, aber endliche Aussagen möglich. Da sich die Informationen auf den Datenträgern in Informationseinheiten von bits auflösen lassen, können alle möglichen Aussagen abzählbar angeordnet werden.

Im Hinblick auf die Wirkung einer Informationseingabe durch das Lesen eines Magnetbandes in einem Rechenautomaten, kann vom "Sinn" einer Aussage gesprochen werden. Werden etwa einem Rechenautomaten zwei Zahlen zur Multiplikation eingegeben, dann "versteht" der Automat die Aussage nur dann im richtigen "Sinn", wenn er auf Grund der Eingabe die Multiplikation der beiden Zahlen richtig durchführt und ein Magnetband mit dem Ergebnis, nämlich dem Produkt, ausgibt. Der "Sinn" einer Aussage ist somit vom Rechenautomaten abhängig, für den sie bestimmt ist bzw. von dem sie stammt.

Ob ein Rechenautomat eine Aussage "versteht", hängt nun davon ab, ob er eine für den betreffenden Datenträger, also für das Magnetband geeignete Lesevorrichtung enthält und ob er so programmiert ist, daß er die durch die Aussage geforderte Reaktion zeigen kann.

Man kann sich nun überlegen, welche Teile der Mathematik von derartigen Rechenautomaten betrieben werden können, wenn man entsprechend komplexe Rechenautomaten mit bestimmten Eigenschaften zuläßt.

Wir ersetzen nun in unseren Überlegungen die Rechenautomaten durch Menschen, denen zum Lesen der Magnetbänder Lesegeräte mit Bildschirmen und zur Erzeugung von Datenträgern Datenerfassungsgeräte, etwa mit Magnetbandausgabe, zur Verfügung stehen. Übersteigt der Umfang der

Information auf einem Magnetband die Kapazität des Bildschirmes, dann ist ein solches Magnetband abschnittweise in gleicher Weise zu lesen, in der verschiedene Seiten eines Buches hintereinander nach jeweiligem Umblättern gelesen werden. Man überlegt sich leicht, daß die Einschränkung einer Diskussion zwischen zwei Personen auf solche Aussagen, die auf Magnetbändern festgehalten werden können, für den Bereich der Mathematik aber, wie weitere Überlegungen zeigen, letztlich auch ganz allgemein keine prinzipielle Einschränkung bedeutet.

Ob eine Person eine Aussage versteht, hängt von der Aussage und vom "Wissen" der Person ab. Ungenügendes Wissen kann durch Lernen ergänzt werden, und zwar in ähnlicher Weise wie Rechenautomaten programmiert werden können.

Der Sinn einer Aussage hängt wieder von der auf dem Magnetband festgehaltenen Information und vom Wissen der Person ab. Da dies im Prinzip für alle Personen gilt, ist es eigentlich unzulässig, vom Sinn einer Aussage "an sich" zu sprechen. Wenn dies dennoch üblich ist, dann offenbar deshalb, weil man gleichartiges "Wissen" bei allen Personen voraussetzt ohne dies aber ausdrücklich zu postulieren. Wir möchten auf diese Umstände ausdrücklich hinweisen.

Wir wollen nun die Mächtigkeit der "Menge aller möglichen Bedeutungen" einer Aussage abschätzen. Wir behaupten, daß ihre Mächtigkeit höchstens gleich der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen ist.

Zum Beweis überlegen wir uns, daß zum "Lesen" der Aussage eine gewisse Zeit, mindestens jedenfalls die Elementarzeit notwendig ist und daß die Person während des Lesens einen gewissen Raum, mindestens das Volumen eines Würfels mit der Seitenlänge der Elementarlänge einnehmen muß. Bilden wir nun Raum-Zeit-Elemente aus Würfeln der erwähnten Größe, die jeweils für die Dauer der Elementarzeit existieren, dann muß jedem Lesevorgang durch jede mögliche Person in jedem möglichen Zeitpunkt mindestens ein Raum-Zeit-Element eindeutig zugeordnet werden können. Aus der Abzählbarkeit der Raum-Zeit-Elemente, die trivialerweise gegeben ist, folgt die Abzählbarkeit der möglichen Lesevorgänge durch mögliche Personen und damit die Abzählbarkeit der möglichen Bedeutungen einer Aussage.

Da die in bits auflösbaren Informationen aber offenbar selbst abzählbar angeordnet werden können, folgt nunmehr, daß alle möglichen Bedeutungen aller möglichen Aussagen abzählbar angeordnet werden können.

Wir wollen dies am Beispiel jener Aussagen, die reelle Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 bezeichnen, näher erläutern. Solche Zahlen sind zum Beispiel:

$0'33$

$0'\dot{3}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$

$0'\alpha_1\alpha_2 \ldots$, wobei $\alpha_n = 1$, wenn die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in x, y und z ganzzahlig lösbar ist, und $\alpha_n = 0$ sonst.

Bis auf die letzte Zahl, von der nicht sicher ist, ob sie überhaupt eindeutig ist - es ist unter Umständen unentscheidbar, ob diese Zahl von 0'11 verschieden ist oder nicht - handelt es sich um Zahlen, die uns aus der klassischen Mathematik bekannt sind. Zahlen lassen sich aber auch durch Aussagen anderer Art eindeutig bestimmen, ohne daß ihr Wert im gegenwärtigen Zeitpunkt aber überhaupt bekannt ist, so etwa die Zahl der Elementarteilchen der Erde zur Zeit von Christi Geburt.

Eine weitere Form von Aussagen, durch die eine Zahl eindeutig bezeichnet werden kann, ist etwa: "Die Zahl, an die eine Person P im Zeitpunkt t gedacht hat". Eine derartige Aussage ist gleichwertig mit der Aussage: "Der Denkvorgang, dem das Raum-Zeit-Element Nr.N zugeordnet ist", wobei N den Platz des Raum-Zeit-Elementes in der bereits erwähnten abzählbaren Anordnung aller Raum-Zeit-Elemente bezeichnet.

Bei Aussagen der oben bezeichneten Art wird natürlich in der Regel dem betreffenden Raum-Zeit-Element gar kein Denkvorgang zugeordnet werden können, da nur in wenigen Teilen des Weltalls und nur in verhältnismäßig wenigen Zeitelementen tatsächlich an eine Zahl gedacht wird. Andererseits gibt es aber offenbar sogar unendlich viele Aussagen, die jede Zahl, an die einmal tatsächlich gedacht wurde oder an die einmal tatsächlich gedacht werden wird, eindeutig bezeichnen.

Die zuletzt dargelegte Methode der Bezeichnung von Zahlen ermöglicht es also, diese durch Aussagen zu bezeichnen, ohne dabei eine

Information, etwa über die Größe solcher Zahlen, zu geben. Dies hat z.B. dann eine gewisse Bedeutung, wenn - wie in der Mathematik recht häufig - eine Zahl aus einer Menge für weitere Berechnungen ausgewählt wird, ohne daß man ihre Größe angibt, etwa durch die Worte: "Es sei x eine Zahl aus der Menge M ...". Mit Formulierungen dieser Art beginnen häufig Beweise, mit denen Eigenschaften von Zahlen der Menge M nachgewiesen werden sollen.

Aus der Abzählbarkeit aller Raum-Zeit-Elemente folgt jedenfalls die Abzählbarkeit aller Zahlen, die in der bisher dargelegten Art und Weise durch Aussagen beschrieben werden können. Obwohl die Menge der Raum-Zeit-Elemente und die Menge der durch Aussagen beschreibbaren Zahlen beide unendlich sind, gibt es unendlich viele Aussagen bzw. Raum-Zeit-Elemente, die keine Zahl eindeutig beschreiben. Es wird aber auch niemals möglich sein, für alle Raum-Zeit-Elemente auch nur zu entscheiden, ob sie dem Lesevorgang einer Aussage, durch die eine Zahl eindeutig beschrieben wird, zugeordnet sind. Dies ist leicht einzusehen, da heute etwa nicht entschieden werden kann, ob eine bestimmte, uns vielleicht unsinnig anmutende Aussage im Jahre 10000 für irgendjemand einen Sinn ergibt und sogar vielleicht eine Zahl eindeutig beschreibt.

Wir teilen nun die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in zwei Klassen ein. In Klasse 1 fassen wir alle jene Zahlen zusammen, die durch irgendeine Aussage in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person eindeutig beschrieben sind. So wird etwa die Aussage "1/2" für Sie alle und für mich heute und hier die Zahl 1/2 eindeutig beschreiben.

Aus der Abzählbarkeit der Raum-Zeit-Elemente folgt die Abzählbarkeit aller Zahlen der Klasse 1.

Da es nun mehr als abzählbar viele reelle Zahlen zwischen 0 und 1 gibt, fassen wir die nicht in Klasse 1 enthaltenen in einer neuen Klasse 2 zusammen.

Wir wollen nun einige Fragen aufwerfen:

Zahlreiche Beweise der Überabzählbarkeit bestimmter Mengen beruhen darauf, daß man eine beliebige konkrete abzählbare Anordnung aller Elemente einer Menge annimmt und sodann ein neues Element "konstruiert" bzw. "beschreibt", von dem man nachweist, daß es in der abzählbaren Anordnung nicht enthalten ist, obwohl es zur Menge gehört

So geht man etwa vor beim Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durch die Konstruktion der "Diagonalzahlen" nach Cantor oder beim Beweis der Überabzählbarkeit der Potenzmenge der Menge der natürlichen Zahlen.

Wir bemerken, daß in den hier genannten Fällen jeweils nach vollzogener Anordnung angeblich aller Elemente einer Menge ein neues Element beschrieben, und zwar im Sinne unserer Darstellungen durch eine Aussage beschrieben wird, das in der ursprünglichen Anordnung nicht enthalten ist. Die Frage in diesem Zusammenhang lautet: "Wie lassen sich die entstehenden Widersprüche erklären, wenn, wie etwa bei den reellen Zahlen der Klasse 1, alle durch Aussagen beschreibbaren Zahln schon per definitionem in der Anordnung enthalten sind?"

Eine weitere Frage bezieht sich auf die reellen Zahlen der Klasse 2. Um mit ihnen zu rechnen, muß man sie einzeln betrachten können, man muß einzeln auswählen können, es muß zumindest sinnvoll sein, mit ihnen zu rechnen und Sätze zu bilden, die mit den Worten "Es sei x eine reelle Zahl aus Klasse 2 ..." beginnen. Andererseits aber haben wir festgestellt, daß Zahlen, für welche solche Sätze von irgendjemand in irgendeinem Zeitpunkt gebildet werden können, per definitionem zur Klasse 1 gehören. Auch hier erhebt sich die Frage nach der Ursache des Widerspruches.

Eine andere Frage: "Wie geht in unsere Mathematik die Tatsache ein, daß es unmöglich ist, in endlicher Zeit unendlich viel Information zu übermitteln?" Diese Frage soll am Beispiel der unendlichen Dezimalzahlen erläutert werden. Wann immer wir von konkreten unendlichen Dezimalzahlen sprechen, dann handelt es sich um solche, die als Zahl in endlicher Form beschrieben werden können und nur in der Dezimalzahldarstellung unendlichen Raum bzw. unendliche Zeit in Anspruch nehmen. Da die Voraussetzung, daß nur Zahlen, die eine endliche Darstellung gestatten, (auch wenn sie in der Dezimalzahldarstellung unendlich viele Stellen erfordern) in der Mathematik Verwendung finden, praktisch nie explizit in Axiomensysteme eingeht, müßte doch entschieden werden können, ob die Voraussetzung wenigstens implizit in unserer Mathematik berücksichtigt ist. Wäre dies aber der Fall, dann ergäbe sich z.B. die Abzählbarkeit aller Zahlen in recht trivialer Weise. Ist dies aber nicht der Fall, dann sollte man sich überlegen, wie eine Mathematik mit dieser Voraussetzung aussehen könnte und welche Aussagen zusätzlich möglich sind, wenn man diese Voraussetzungen wegfallen läßt.

Nun noch einige Überlegungen, die auf einer Weiterführung der hier skizzierten Gedankengänge beruhen. Versucht man rein theoretisch ein Weltmodell aufzubauen, bei dem die Dualität zwischen Geist und Materie dadurch aufgehoben wird, daß man die Komponente "Geist" bzw. "Bewußtsein" als grundsätzlich in der Materie vorgebildet erachtet, wie etwa bereits Teilhard de Chardin, dann kann Geist und Bewußtsein, obwohl immanent stets vorhanden, sich erst in genügend komplexen kybernetischen Systemen manifestieren.

Mit dieser Modellvorstellung bleiben aber zahlreiche Fragen mit für uns ganz wesentlichen Komponenten des Geistes unbeantwortet. So die vielleicht wichtigste Frage: "Wie ist Erkenntnis möglich?" bzw. "Wie stellt sich Erkenntnis in unserem Modell dar?"

Der Ausdruck "innere Anschauung" könnte uns einen Hinweis liefern. Er setzt voraus, daß im Inneren etwas angeschaut werden kann. Es muß daher ein Modell des zu Erkennenden "im Inneren" aufgebaut werden. Tatsächlich lassen sich Erkenntnisvorgänge sehr denkökonomisch dadurch erklären, daß man annimmt, das zu Erkennende werde in einem - im allgemeinen vereinfachten - Modell im Inneren abgebildet, also z.B. durch entsprechende Zustände bzw. Vorgänge im Gehirn.

Folgerungen aus der Erkenntnis etwa der Funktionen eines Systems der Außenwelt können nun durch Simulation - ein Ausdruck, der wiederum auf die Analogie zu Rechenautomaten verweisen soll - am inneren Modell gezogen werden, wobei die Ergebnisse dieser Simulation mit den Gegebenheiten der Außenwelt verglichen werden und so die Brauchbarkeit der Modellvorstellungen kontrolliert werden kann.

Daß unabhängig vom Menschen "lebende Systeme" umso eher überleben können, je besser sie das Verhalten ihrer Umwelt "erkennen" bzw. "voraussehen" können, liegt auf der Hand.

Aus der Fülle der Fragen, die sich in diesem Zusammenhang aufdrängen, sei noch die nach dem Platz der Intuition gestellt. Zur Lösung von Problemen der Außenwelt wird man versuchen, geeignet erscheinende Modelle, die dem Problem gerecht zu werden scheinen, zu finden. Dabei kann man entweder auf zur Gänze bekannte Modelle zurückgreifen oder man kann versuchen, neue Modelle zu schaffen. Bei dieser Schaffung neuer Modelle wird es nicht immer möglich sein, nach einem systematischen Verfahren, sozusagen automatisch vorzugehen. Ohne weitere Richtlinie über die Vorgangsweise bleibt dann vielfach nichts anderes übrig als ein Probierverfahren, so wie man versucht, den fehlenden Stein eines Puzzlespiels einzusetzen, indem man eine zufällige Auswahl aus dem vorhandenen Vorrat der Steine trifft. Ein zufälliger Auswahlvorgang kann nun zum Auffinden eines Modells führen, das sich zur Lösung bzw. Behandlung des Problems der Außenwelt eignet. Man kann sagen, die Lösung durch "Intuition" gefunden zu haben.

Derartige zufällige Auswahlvorgänge werden vor allem im Bereich der Forschung immer wieder auftreten.

Wenn von dem Finden bzw. Erfinden passender Modelle gesprochen wird, dann ist es sehr unwahrscheinlich, daß solche Modelle als Ganzes und unabhängig von vorhandener Erkenntnis, also von bereits bekannten Modellen sein sollten. Es ist vielmehr anzunehmen, daß neue Erkenntnisse durch neue Kombinationen bekannter Modellteile entstehen, Modellteile, die ihre Wurzeln bereits in den Uranfängen des Lebens haben mögen. Das kann aber die Bedeutung des Findens neuer Modelle ebenso wenig schmälern wie die Feststellung, daß auch die größten wissenschaftlichen Erkenntnisse der Menschheit letztlich in Worten ausgedrückt werden, die schon lange bekannt waren. Wenn Goethe sagt: "Wer kann was Kluges, wer was Dummes denken, das nicht die Vorwelt schon gedacht", dann mag dies für die Bausteine der Gedanken zutreffen, der wesentliche Inhalt von Erkenntnissen besteht aber gerade in der Kombination solcher bekannter Bausteine.

Zurückkommend auf das Problem der Abzählbarkeit von Zahlen der Klasse 1 überlegen wir uns leicht, daß man nicht nur von Zahlen, sondern ganz allgemein von Denkobjekten der Klasse 1 spre_chen kann, während "alle anderen Denkobjekte" in einer Klasse 2 zusammengefaßt werden können. Da jedoch aus den bereits dargelegten Gründen niemals irgendeine Person tatsächlich an ein einzelnes derartiges Objekt "denken" kann, ohne daß es damit per definitionem ein Denkobjekt der Klasse 1 sein müßte, so daß ein Widerspruch entsteht, handelt es sich ganz allgemein bei den Objekten der Klasse 2 um in sich widersprüchliche Gedankenkonstruktionen.

Daß die Menge der Denkobjekte der Klasse 1 oder speziell der Zahlen der Klasse 1 unendlich und nicht endlich ist, rührt daher, daß unendlich viele Raum-Zeit-Elemente, aber auch beliebig lange Magnetbänder zugelassen werden. Betrachtet man aber einen lebenden Menschen und berücksichtigt man, daß seine Lebensdauer endlich und daß er in endlicher Zeit auch nur ein endliches Stück eines Magnetbandes mit Hilfe des Bildschirmgerätes lesen kann und auch nur endliche Vorgänge in seinem Gehirn ablaufen können, dann sieht man, daß für ihn auch nur endlich viele Gedanken möglich sind.

Geistige bzw. Bewußtseinsvorgänge sind zwar nach dieser Modellvorstellung grundsätzlich an ihnen entsprechende materielle Vorgänge geknüpft, doch bietet die ungeheure Komplexität des menschlichen Gehirns und seiner Nervenzellen genügende Gewähr dafür, daß die allseits so geschätzte Individualität der Einzelpersönlichkeit voll gewahrt bleibt.

Andererseits wird durch die Vererbung von Generation zu Generation eine gleichmäßige Entwicklung der "hardware" und zum Teil auch der "software" sichergestellt, wobei durch die Ähnlichkeit der Lernvorgänge im weitesten Sinn die überaus starke Übereinstimmung von Menschen einer Zeit und eines Kulturkreises erklärlich wird. Der Ausdruck "überaus starke Übereinstimmung" gilt natürlich nur im Vergleich mit anderen denkbaren kybernetischen Systemen. Die von einem gewissen Gesichtspunkt aus ebenso überaus starke Verschiedenheit ist eben durch die erwähnte Vielfalt vor allem der Hirnfunktionen zu erklären.

Ein vielleicht zu stark vereinfachtes Gleichnis: Unter allen Spielen weisen die verschiedenen Schachpartien untereinander überaus starke Ähnlichkeit auf, für den einzelnen Schachspieler sind jedoch viele Partien völlig unterschiedlich.

Auf die vielfältigen Konsequenzen dieses Denkmodells kann natürlich auch nicht annähernd eingegangen werden, sicherlich lassen sich aber auch Forschungsergebnisse wie etwa die Archetypen bzw. das Kollektive Unbewußte glatt einfügen.

Zum Abschluß sei noch die Frage nach dem Sinn von "synthetischen Urteilen à priori" die für Kant und dessen Nachfolger Voraussetzung für die Berechtigung, Methaphysik zu treiben, darstellen. Ein synthetisches Urteil à priori wäre in unserer Darstellung eine Mitteilung, die "vor jeder Erfahrung einer Person" von dieser als richtig angesehen werden muß. Solche Urteile müssen also für jede Person und in jenen Zeitpunkten richtig sein. Ein klassisches Beispiel für ein derartiges Urteil war seinerzeit: "Die Gerade ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte". Dieser Satz kann aber nur dann als synthetisches Urteil à priori gelten, wenn die Begriffe "Gerade" und "kürzeste Verbindung zweier Punkte" ebenso wie der Begriff "gleich sein" à priori vorgegeben sind. Abgesehen davon, daß alles dafür spricht, daß diese verhältnismäßig komplexen Begriffe erst durch Erfahrung "erlernt" werden, könnte "à priori" nur bedeuten, dieses Urteil wäre bereits als ein allen Menschen gemeinsamer Komplex vorgegeben. Die Schlußfolgerung, daß dies für alle irgendeinmal existierenden Menschen so sein muß, ist ein Analogieschluß wie er eben durch Erfahrung nahegelegt wird, der aber nicht denknotwendig erscheint. Auf Grund unseres Denkmodells verliert der Begriff "synthetisches Urteil à priori" jeden Inhalt. Wir können also für Reflexionen die bekannte Frage: "Wie sind synthetische Urteile à priori als Mitteilung möglich" stellen.

Zum Abschluß sei noch einmal der Grundgedanke herausgestellt: Aus der Abzählbarkeit aller möglichen Mitteilungen in Form von Datenträgern und aus der Abzählbarkeit aller möglichen Subjekte (Menschen) folgt die Abzählbarkeit aller möglichen Denkobjekte. Spricht man von einzelnen Zahlen aus einer Menge, die nicht in dieser abzählbaren Menge enthalten sind, dann muß per definitionem ein Widerspruch entstehen.

Um im Sinn unseres Denkmodells zu bleiben: Jede Mitteilung ist nur sinnvoll, wenn sie in mindestens einem Zeitpunkt für mindestens eine Person einen Sinn ergibt. Als Mitteilung von einer Person für andere, wie z.B. bei diesem Vortrag, müssen auch andere Personen dazu gebracht werden, die Gedanken nachzuvollziehen. Aus bestimmten Gründen wurde versucht, dies vorwiegend durch Fragen zu erreichen, deren Beantwortung mehr oder weniger selbst durch Reflexion von jedem Einzelnen erarbeitet werden muß.

Über die Relativität alles Existierenden.

Spätestens seit Archimedes kann man sagen, daß wesentliche Erkenntnisse in den Naturwissenschaften durch die Relativierung von bis dahin als absolut geltenden Begriffen erreicht wurden. Dennoch enthält jede Wissenschaft zahlreiche Begriffe, denen absolute Gültigkeit zugeordnet wird. Ein derartiger Begriff ist etwa der Begriff "Wahrheit". Keine Wissenschaft kann darauf verzichten die Existenz "absolut wahrer Sätze" vorauszusetzen.

Diesem Phänomen liegt offenbar die starke Gefühlsbewegung des "Evidenzerlebnisses" zugrunde, das etwa eine logische Schlußfolgerung bzw. einen logischen Widerspruch begleitet. Da ein derartiges Evidenzerlebnis vielfach von allen "vernünftigen" Menschen in gleicher weise empfunden wird schließt man auf dessen Allgemeingültigkeit.

Das Festhalten an der Allgemeingültigkeit bestimmter "wahrer Sätze" durch Raum und Zeit, erscheint vorallem deshalb für die Wissenschaften unbedingt notwendig, weil ansonsten jede Aussage stets in Zweifel gezogen werden könnte und überhaupt keine "allgemein gültigen" Aussagen möglich erscheinen, eine Folge, die, wie man zu meinen geneigt ist, Wissenschaft überhaupt unmöglich machen müßte.

Es soll daher zunächst versucht werden, Aussagen über die "erkennbare Welt" mit möglichst wenig Voraussetzungen zu machen.

Dazu ist es notwendig, soweit als möglich vom "Inhalt der Aussagen" abzusehen. Wenn wir aber vom Inhalt absehen, welche gemeinsamen Eigenschaften können wir dann allen denkmöglichen Aussagen zuordnen? Wie können wir Ordnung in die Vielfalt von sinnlosen und sinnvollen, richtigen oder falschen oder unbeweisbaren Aussagen bringen, ohne auf ihren Inhalt einzugehen?

Um hier eine Lösung aufzuzeigen, wollen wir uns einer Modellvorstellung bedienen. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Tatsache, daß Wissenschaft jedenfalls mit Erkenntnis zu tun hat und man nur dort von Erkenntnissen reden kann, wo es sich um grundsätzlich Mitteilbares handelt. Um nun darüber zu reden, ohne in irgendeiner Weise auf den Inhalt des Mitteilbaren einzugehen, insbesondere nicht auf die Frage, ob eine Mitteilung richtig oder falsch, sinnvoll oder sinnlos, usw. ist, stellen wir uns vor, irgendeine Wissenschaft werde von Computern betrieben, die "Eindrücke" aus ihrer Umwelt durch Meßgeräte, analog den Sinnesorganen, empfangen und die Informationen im Wege von Datenträgern, etwa von Lochkarten, austauschen können.

Offenbar lassen sich alle möglichen Aussagen solcher Computer abzählbar anordnen. Infolge der räumlichen Ausdehnung können nämlich zunächst alle Computer abzählbar angeordnet werden. Weiters erfordert der Einlesevorgang einer Lochkarte bzw. eines Paketes von Lochkarten eine endliche Zeit, so daß alle möglichen Einlesevorgänge abzählbar angeordnet werden können, und schließlich können alle möglichen Lochkartenstapel abzählbar angeordnet werden. Da als "Sinninhalt einer Aussage" offenbar nun die Wirkung der Lochkarteneingabe auf den Computer angesehen werden kann und diese vom "Zustand" des Computers (von seiner Konstruktion und seiner Programmierung) abhängt, der wiederum durch die Angabe der Zahl, um den wievielten Computer es sich handelt, und des

Zeitpunktes des Lesevorganges, für den der Zustand dieses Computers eindeutig festliegt, bestimmt ist, lassen sich durch Anordnung der Nummern aller Computer, aller möglichen Einlesevorgänge und aller möglichen Lochkartenstapel alle möglichen Sinninhalte von Aussagen anordnen. Für die Anordnung der Einlesevorgänge ist es ausreichend, eine genügend feine Intervalleinteilung vorzunehmen, so z.B. Intervalle jener Zeitlänge, die für das Einlesen einer Lochkarte mindestens benötigt wird.

In analoger Weise ordnen wir nun alle möglichen Sinninhalte von Aussagen für Menschen an. Jede Aussage besteht darin, daß eine bestimmte Person P in einem bestimmten Zeitintervall (t_1, t_2) eine schriftlich darstellbare Mitteilung M erzeugt. Die Anzahl der möglichen Personen P ist sicher abzählbar, ebenso die Anzahl der zugehörigen Intervalle (t_1, t_2). Da diese Intervalle jedenfalls länger sein müssen als die Elementarzeit, genügt es, alle abzählbaren Zeitpunkte, die von einem fest vorgegebenen Zeitpunkt einen Abstand von einem ganzzahligen Vielfachen der Elementarzeit haben, zu betrachten. Die Menge der möglichen Intervalle (t_1, t_2) kann dann ebenfalls abzählbar angeordnet werden. Was nun die schriftlichen Mitteilungen betrifft so können diese stets aus genügend kleinen weißen und schwarzen Quadraten zusammengesetzt vorgestellt werden. Wählt man als Seitenlänge eines derartigen Elementarquadrats etwa die Elementarlänge, dann können auf diese weise z.B. alle schwarz auf weiß geschriebenen Mitteilungen aus solchen Elementarquadraten zusammengesetzt werden. Auf einem Bildschirm der Länge a Elementarlängen und der Breite b Elementarlängen gibt es genau $2^{a.b}$ mögliche Anordnungen dieser schwarzen oder weißen Elementarquadrate und offenbar können alle derartigen Bildschirmmitteilungen abzählbar angeordnet werden. Insbesondere ist alles, was je geschrieben wurde, ebenso wie alles, was je geschrieben werden wird, ja was je geschrieben werden kann, in der Menge dieser Bildschirmmitteilungen enthalten.

Zusammenfassend sei hiezu festgehalten: Alles, was irgend einmal von irgend jemand gesagt wurde, gesagt werden wird bzw. gesagt werden kann, läßt sich abzählbar anordnen. Wir bemerken, daß nur von der Möglichkeit irgend etwas zu sagen gesprochen wird, nicht aber davon, ob etwa das Gesprochene "existiert", "wahr" sei usw., also unabhängig von einer "Existenz" bzw. von irgend einem "Sinninhalt" des Gesprochenen.

Damit ist aber auch gleichzeitig eine abzählbare Anordnung "alles Existierenden" möglich.

Um dies zu zeigen überlegen wir, daß es nicht sinnvoll wäre, den Begriff der Existenz, wie weit man ihn auch zu fassen bereit ist, auf "etwas" zu beziehen, "über das nie jemand hat sprechen können, sprechen kann oder sprechen können wird". Insbesondere müssen ja alle Beweise der Überabzählbarkeit von Mengen dazu führen, daß - infolge des Auswahlaxioms - für jede abzählbare Untermenge stets ein Element der Menge ausgewählt werden kann, welches in dieser Untermenge nicht enthalten ist, über das aber gesprochen werden kann. Wählt man nun als abzählbare Untermenge jene, welche aus allen Elementen besteht für die es irgend eine Person P gibt, die in irgend einem Zeitpunkt t bereit ist, durch irgend eine Mitteilung von einem solchen Element zu sprechen, dann können, da dieses Sprechen durch eine Mitteilung M vor sich gehen muß, alle diese Elemente abzählbar angeordnet werden. Es ist dann per definitionem nicht möglich, daß irgend eine Person P in irgend einem Zeitpunkt t über ein angeblich nicht in dieser Untermenge enthaltenes Element spricht. Insbesondere ist kein Beweis für die Existenz von Elementen außerhalb dieser abzählbar anordenbaren Menge möglich.

An dieser Stelle sei eingefügt, daß wir auch der Frage, wann eine Mitteilung ein bestimmtes Objekt bezeichnet, definiert usw. aus dem Wege gehen und uns mit der allgemeinen Feststellung begnügen, daß eine Person in einem Zeitpunkt durch eine Mitteilung behauptet " von einem Objekt zu sprechen ".

Es bleibt insbesondere außer Betracht ob diese Mitteilung der Person richtig oder falsch oder sinnlos ist.

Es wird also die Menge aller (P,t,M) abzählbar angeordnet, wobei P alle m ö g l i c h e n Personen, t alle m ö g l i c h e n Zeitpunkte (ganzzahlige Vielfache der Elementarzeit) in dem die Mitteilung M gemacht (gesprochen oder geschrieben) werden kann und M alle m ö g l i c h e n Bildschirmmitteilungen durchläuft. Die Anordnung beliebiger Objekte wird nun so vorgenommen, daß jedem Objekt jener Platz zugeordnet wird, den in der Anordnung der (P,t,M) eine Mitteilung M einnimmt, für die P in t behauptet oder behaupten könnte, daß er mit ihr von dem in Rede stehenden Objekt spricht. Gibt es mehrere solcher (P,t,M),dann wird jenes mit der kleinsten Ordnungszahl gewählt.

Die Abzählbarkeit aller möglichen Denkobjekte steht offenbar mit der Existenz überabzählbarer Mengen im Widerspruch. Insbesondere führen die üblichen Existenzbeweise überabzählbarer Mengen (man denke etwa an das Cantorsche Diagonalverfahren für die reellen Zahlen oder an die Potenzmenge von unendlichen Mengen) zu Widersprüchen. Da in der von uns gewählten Anordnung Mitteilungen M eine große Rolle spielen, erscheint es zunächst naheliegend zu versuchen, so wie bei bestimmten sprachlichen Antinomien durch die Einführung von Metasprachen den Widerspruch aufzulösen. Man sieht aber sehr leicht, daß ein solcher Versuch scheitern muß, da es sich hier nicht darum handelt, daß "in einer Sprache über die Sprache selbst gesprochen wird" sondern lediglich festgestellt wird, welche Möglichkeiten irgend eine beliebige Person P in einem beliebigen Zeitpunkt t hat, den Sinn einer Mitteilung M zu interpretieren. Insbesondere wird in unserer Anordnung der Begriff "Wahrheit" nicht verwendet. Es bleibt jeder Person P jederzeit völlig freigestellt, jede Mitteilung M zu interpretieren, sie als sinnlos zu bezeichnen, sie zu bejahen oder zu verneinen, zu behaupten, daß sie einen bestimmten Sinn habe, usw.

Jede Strukturierung der Mitteilungen könnte zu einer Verringerung der Zahl der notwendigen (P,t,M) führen. Allein die Behauptung, es gäbe allgemein gültige Aussagen, etwa alle Mitteilungen der Gestalt $\bar{M}$, hätte, wäre sie richtig, zur Folge, daß aus der Menge der (P,t,M) alle (P,t,$\bar{M}$) bis auf alle ($\bar{P}$, $\bar{t}$, $\bar{M}$) für eine bestimmte Person $\bar{P}$ und einen bestimmten Zeitpunkt $\bar{t}$ weggelassen werden könnten, ohne daß für irgend ein Denkobjekt ein Platz verloren ginge. Jede Sprache, jede Metasprache, jede Metametasprache usw. muß sich im Rahmen der Menge (P,t,M) bewegen.

D i e s e M e n g e s t e l l t s e l b s t k e i n e S p r a c h e d a r , da ihre Elemente keiner weiteren Interpretation fähig sind. Lediglich die Mitteilungen M können den Charakter einer Sprache haben, während ihr Sinn jeweils von P und t abhängt.

Die durch (P,t,M) mögliche abzählbare Anordnung aller Denkobjekte beruht also darauf, daß problematische Begriffe wie "Wahrheit" bzw. "Sinn einer Aussage" für die Anordnung gegenstandslos sind. Diese Begriffe werden grundsätzlich relativiert und dürfen nur für jeweils eine bestimmte Person P und jeweils einen bestimmten Zeitpunkt t mit einer Mitteilung M in Verbindung gebracht werden.

Im folgenden sollen zwei verschiedene Anwendungen der vorstehenden Überlegungen dargelegt werden:

Über die Abzählbarkeit alles Existierenden

Die Existenz überabzählbarer Mengen wird für das Beispiel der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 häufig durch Konstruktion der sogenannten Cantor'schen Diagonalzahl bewiesen. Man geht dabei bekanntlich von einer beliebigen Anordnung von Dezimalzahlen der Gestalt

$$a_n = 0{,}a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn}\dots$$

aus, wobei n alle natürlichen Zahlen durchläuft und konstruiert die "Dezimalzahl"

$$b = 0{,}b_1b_2\dots b_n\dots$$

mit

$$b_n = 1 \text{ für } a_{nn} \neq 1 \text{ und } b_n = 0 \text{ für } a_{nn} = 1.$$

Offenbar gilt

$$\bigwedge_n a_n \neq b$$

und da b zwischen 0 und 1 liegt, ist damit die Unvollständigkeit der ursprünglichen Anordnung gezeigt.

Läßt sich aber in dieser Weise auch die Unvollständigkeit der Anordnung aller durch die Menge (P,t,M) eingeführten reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zeigen?

Wir haben behauptet, daß in der, der Menge aller (P,t,M) zugeordneten Objekte jedenfalls alles Existierende enthalten ist, demnach auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Wenn auch nur "sehr wenige" Elemente (P,t,M) aus der Menge aller (P,t,M) einer reellen Zahl zwischen 0 und 1 entsprechen, so gibt es doch nach unserer Behauptung für jede existierende reelle Zahl zwischen 0 und 1 mindestens eine Person P, die in mindestens einem Zeitpunkt t behaupten könnte, daß durch mindestens eine Mitteilung M von dieser Zahl die Rede ist. Legt eine Person $\bar{P}$ in irgendeinem Zeitpunkt $\bar{t}$ in einer Mitteilung $\bar{M}$ der Konstruktion einer Dezimalzahl b wie oben beschrieben die durch die abzählbar angeordnete Menge aller (P,t,M) sich ergebende Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zugrunde, und behauptet sie, daß ($\bar{P}$, $\bar{t}$, $\bar{M}$) eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, nämlich die Dezimalzahl b zugeordnet ist, dann muß sie sich den Einwand gefallen lassen, daß ihre Definition der Dezimalzahl einen Widerspruch enthält. Die von $\bar{P}$ "dargestellte" Dezimalzahl b hat nämlich nach unserer Definition eine Nummer in der Anordnung aller reellen Zahlen, so daß für sie

$$b_n = 1 \wedge b_n \neq 1$$

gelten müßte, was einen Widerspruch darstellt. Damit ist der Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung mißlungen.

Am Beispiel eines gegen diese Ausführungen erhobenen Einwandes sei auf ein Mißverständnis hingewiesen, das offenbar entstehen kann. Eingewendet wurde nämlich, daß die Person $\bar{P}$ zunächst nur jene Mitteilungen M berücksichtigt habe, die aus einer bestimmten Sprache L stammen. Die Konstruktionsvorschrift für die Diagonalzahl b wurde hingegen als Ausdruck einer Metasprache $\bar{L}$ angesehen und daraus die Berechtigung abgeleitet, anzunehmen, daß diese Konstruktionsvorschrift in den ursprünglichen Mitteilungen nicht enthalten sei.

Dieser Einwand übersieht aber, daß Begriffe wie Sprache bzw. Metasprache auf die Menge der Mitteilungen M nicht anwendbar sind, da hier nur die Mitteilungen gemeinsam mit ihrer "Wirkung" auf eine Person P betrachtet werden. Ob eine Mitteilung M einer bestimmten Sprache zugehört bzw. welcher Sprache kommt nur darin zum Ausdruck, wie eine Person P in einem Zeitpunkt t diese Mitteilung M "versteht" bzw. "interpretiert".

Der Einwand übersieht letztlich, daß die Mitteilungen nicht ihrem Sinn nach in unserer Anordnung Berücksichtigung finden, sondern lediglich ihrer äußeren Form nach, ebenso etwa wie Lochkarten die zur Eingabe in einen Computer verwendet werden.

Es erscheint hingegen notwendig, auf einen Widerspruch hinzuweisen, der darin gesehen werden könnte, daß die Aussage alles Existierende sei abzählbar, in dieser Form ja ebenfalls als absolute Wahrheit angesehen wird. Man könnte mit Recht die Frage aufwerfen, wie sich dieser Anspruch auf absolute Gültigkeit mit der Relativität des Wahrheitsbegriffes verträgt.

Tatsächlich ist es notwendig, einen Konsens über die folgenden Punkte vorauszusetzen:

1) Der "Inhalt" bzw. "Sinn" einer Aussage ist durch die Form der Mitteilung M die diese Aussage enthält und durch die Person P, die diese Aussage macht, sowie durch den Zeitpunkt t, in dem sie diese Aussage macht, bestimmt.

2) Alle möglichen Kombinationen aller möglichen Mitteilungen mit allen möglichen Personen und allen möglichen Zeitpunkten können abzählbar angeordnet werden.

3) Aus 1) und 2) erhält man eine abzählbare Anordnung aller möglichen Inhalte von Aussagen bzw. aller möglichen Sinngehalte von Aussagen.

Für jemanden, der die Möglichkeit des Betreibens von Naturwissenschaften bejaht, sollte ein Konsens zu diesen Punkten keine wesentliche Einschränkung der Relativität des Wahrheitsbegriffes bedeuten.

Daß nicht nur der vorhin erwähnte Einwand, der sich auf eine unzulässige Einschränkung der in der Anordnung verwendeten Mitteilungen auf solche einer Ursprungssprache L stützt, ins Leere geht, sondern, daß jeder Einwand der die Konstruktion einer angeblich in unserer Anordnung nicht enthaltenen reellen Zahl zum Ziele hat, ins Leere gehen muß, kann durch die folgende einfache Überlegung gezeigt werden:

Der Einwand müßte von einer Person P in einem Zeitpunkt t in Form einer Mitteilung M gemacht werden. Ziel dieser Mitteilung müßte es sein, von einer angeblich in der Anordnung nicht enthaltenen reellen Zahl zu sprechen. Gäbe es aber eine solche Mitteilung, dann würde dem Element (P,t,M) gerade jene reelle Zahl zugeordnet werden, von der gesprochen wird. Damit wäre sie per definitionem in der Anordnung enthalten.

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß auch alle anderen Beweise von der Existenz überabzählbarer Mengen ins Leere gehen müssen, da sie durchwegs darauf aufbauen, daß eine Person P in einem Zeitpunkt t von einem Element spricht, und zwar durch eine Mitteilung M, das angeblich in der ursprünglichen Anordnung nicht enthalten ist. Da die Anordnung aber sicher alle Elemente enthält, von denen irgendjemand in irgendeinem Zeitpunkt durch eine beliebige Mitteilung sprechen kann, beruht die Behauptung, die Anordnung sei unvollständig, auf der Annahme, es wäre in irgendeinem Zeitpunkt irgendjemanden möglich von etwas zu sprechen, wovon in keinem Zeitpunkt von irgendjemandem gesprochen werden kann. Es sollte genügen sich in der Diskussion dieser Fragen auf solche Personen zu beschränken, die bereit sind, die Wahrheit der hier zugrunde gelegten Annahmen in jedem Zeitpunkt anzuerkennen.

Ein weiteres Beispiel geben die folgenden Überlegungen:

Über den relativen Wert von Kunstwerken

Gehen wir wieder vom Beispiel der Computer und der Lochkarten aus. So wie die Lochkarte eine vom "Zustand" des Computers abhängige "Wirkung" hat, so hat auch das Kunstwerk eine vom "Zustand" des Konsumenten abhängige "Wirkung". Nach unserer Beschreibungsmethode kann die Wirkung (P,t,K) eindeutig zugeordnet werden. (P,t,K) bedeutet, daß die Person P im Zeitpunkt t das Kunstwerk K "konsumiert", d.h. je nach dem betrachtet, liest, hört usw.

Wir wollen nun einen Aspekt des Kunstkonsums herausheben. Dazu betrachten wir ein "bedeutendes Kunstwerk" z.B. das Bild eines berühmten Malers, wie etwa Rembrandts, und eine geschickte Fälschung dieses Bildes. Die Fälschungstechniken sind heute so "fortgeschritten", daß es sicher möglich ist, eine Fälschung herzustellen, die "mit freiem Auge" nicht als solche erkennbar ist. Sei K das Original und $\bar{K}$ die Fälschung, dann müßte die (P,t,K) zugeordnete "Wirkung" bedeutend höherwertig sein, als die $(P,t,\bar{K})$ zugeordnete, wenn man den Marktwert von K bzw. $\bar{K}$ zugrunde legt. Worin kann nun der starke Unterschied begründet sein? Offenbar nicht im "Eindruck" von K bzw. $\bar{K}$, denn dieser soll ja nach Voraussetzung für P in t nicht unterscheidbar sein. Also muß der Unterschied in P durch das "Wissen" um die Echtheit von K bzw. die Unechtheit von $\bar{K}$ hervorgerufen werden. Wir gelangen also zu der Schlußfolgerung, daß der größte Teil des Wertes von K, wenn man den Unterschied des Marktpreises gegenüber dem von $\bar{K}$ zugrunde legt, lediglich vom Wissen von P über die Echtheit von K abhängt, aber nicht vom Kunstwerk selbst.

Damit aber ist unsere Einstellung zu den Kunstwerken "berühmter" Künstler offenbar eine andere als zur Zeit, als diese Künstler noch unbekannt waren. Der Bewertungsvorgang ist etwa folgendermaßen zu erklären: Ein Mensch erstellt Kunstwerke die von seinen Zeitgenossen oder Nachfahren irgendeinmal anerkannt werden. Offenbar zu dieser Zeit aber nicht deshalb, weil der Künstler "berühmt" ist, das muß er ja erst werden, sondern ausschließlich weil die Kunstwerke "gefallen". Sobald aber der Künstler bekannt ist, wird die Bewertungstechnik geändert. Nun ist plötzlich die vorausgesetzte Berühmtheit des Künstlers das Entscheidende, nicht mehr der Eindruck von K ohne Rücksicht auf den Künstler. Eine derartige Kunstbewertung enthält aber eigentlich unangemessen viele Elemente, die mit dem Kunstwerk selbst nichts mehr zu tun haben. Wollte man kritisch sein, müßte man sagen, daß uns in solchen Fällen die Maßstäbe für Kunstwerke überhaupt verloren gegangen sind. Es hat irgendwie den Anschein, als hätten wir mit unserem Kunstverständnis das Niveau von Autogrammsammlern erreicht.

Anscheinend läßt sich hier wieder einmal das Phänomen der Umkehrung der Richtung einer Schlußfolgerung bemerken. Ein Mensch, der Werke von hohem künstlerischem Gehalt schafft, ist ein großer Künstler. Diese Schlußfolgerung ist sicherlich zulässig. Ihre Umkehrung aber ist zumindest bedenklich, wenn man nämlich folgert, daß ein Werk, das von einem großen Künstler geschaffen wurde, auch ein großes Kunstwerk ist. Derartige Fehlschlüsse werden aber nicht nur etwa in den dem täglichen Leben vielleicht ferner stehenden Gebiet der Kunst getätigt, sondern auch in sehr erheblichen Maße im politischen Leben. Aber selbst in die Wissenschaften finden solche falsche Schlußfolgerungen Eingang. Die in den Wissenschaften verwendeten Begriffe verdanken ihre Entstehung der Bezeichnung zunächst konkreter Umweltgegebenheiten. Darunter sind natürlich auch gedankliche Abstraktionen, wie etwa Zahlen, zu verstehen. Immer wieder scheinen solche Begriffe ein von

ihrer Wurzel unabhängiges Eigenleben zu erhalten. Man spricht dann etwa von "allen reellen Zahlen" ohne auf die Problematik dieses Begriffes, der ja nunmehr keine Wurzel im Konstruktiven mehr besitzt, näher einzugehen. Die natürlichen Zahlen werden aus der Anschauung von Mengen durch Abstraktion gewonnen. Durch Operationen wie Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren gelangt man zum Bereich der rationalen Zahlen. Im weiteren wird durch die Einführung algebraischer Funktionen der Bereich der irrationalen Zahlen erreicht und schließlich können über Grenzwertbildungen nach und nach weitere Bereiche der reellen Zahlen erschlossen werden. Stets aber muß man doch davon ausgehen, daß eine neu zu bildende Zahl in irgendeiner endlichen Form beschreibbar ist. Eine unendliche Dezimalzahl kann niemals als solche definiert werden, sondern nur durch das Anschreiben ihrer endlichen Definition. Ein Begriff der reellen Zahlen der über den Bereich der in endlicher Form beschreibbaren Zahlen hinaus geht ist offenbar eine unzulässige Erweiterung der Menge der konstruktiv einzuführenden reellen Zahlen.

Ein anderes Beispiel: Der Begriff der Existenz, ursprünglich abgeleitet von ganz konkreten anschaulichen Dingen, wie etwa existierende Dinge und existierende Personen, gewinnt plötzlich ein unserer Ansicht nach unzulässiges Eigenleben. Die Frage der Eigenschaft der Existenz wird nicht mehr als eine Frage nach der Erweiterung der Definition des Begriffes sondern als eine Frage nach einer Eigenschaft des Denkobjektes verstanden, dem der Begriff der Existenz zugesprochen oder abgesprochen werden soll.

WAS LEISTET DIE SPRACHE?

(Auszug aus einem Brief)

1. Jede Sprache kann nicht mehr leisten als daß sie die Aufgabe einer "Informationseingabe" in das kybernetische System "Mensch" übernimmt, um dieses System in einen anderen "Zustand" zu versetzen. Dies geschieht völlig analog der Eingabe durch das Informationsmedium "Lochkarte" in ein System "Computer".

   Wenn man - um einer lieben alten Gewohnheit zu huldigen - auf den Gedanken nicht verzichten will, daß den Begriffsinhalten der Sprache "Realität" bzw. "Existenz" unabhängig von der Gesamtheit "Eingabemedium plus kybernetisches System" zukommt, dann ist dadurch nur eine entsprechend extensive Verwendung der Begriffe Realität bzw. Existenz gegeben.

2. Unseren Wissenschaften liegt die durch langjährige Gewohnheit, aber durch nichts anderes begründete Annahme zugrunde, daß die "Wirklichkeit" bzw. "Existenz" erkennbare Gegebenheiten seien, die unabhängig vom Menschen gedacht werden können. Die Unabhängigkeit ist aber nur gegenüber dem einzelnen Menschen gegeben, nicht aber gegenüber "dem Menschen". Der "Sinn" einer Lochkarteneingabe an einen Computer ist nur im Zusammenhang mit einem Computer denkbar, wenn er auch unabhängig vom einzelnen Computer ist. Die Tatsache, daß ich hier von einem solchen Sinn spreche, ohne auf irgendeinen konkreten Computer Bezug zu nehmen, bedeutet keinen Einwand gegen meine Überlegungen, da ja Lochkarte und Computer eingebettet sind in das System Sprache und Mensch, in dem etwa mein Brief an Sie stattfindet und das hier an die Stelle des erstgenannten Systems tritt.

   Will man sich nicht in Spekulationen verlieren, die sich wie Traumgebilde jeder verstandesmäßigen Behandlung entziehen, dann kann man den Ausdruck "Existenz" nur dort verwenden, wo es sich um etwas "Denkbares" handelt und Denken ist nur in

   Form von Informationsverarbeitung möglich, insbesondere sind Gedanken im Bereiche der Wissenschaften grundsätzlich schriftlich fixierbare Aussagen, die mindestens einer Person in mindestens einem Zeitpunkt eindeutig zugeordnet werden können.

   Wie man sieht, folgt bereits aus dieser Annahme die Abzählbarkeit alles Existierenden, weil mit der Abzählbarkeit alles Denkbaren identisch. Der Versuch, Mengen von überabzählbarer Mächtigkeit zu erzeugen, gleicht dem Versuch Münchhausens, sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen.

   Beschränkt man allerdings etwa die zulässigen Methoden der Anordnung - wie dies letztlich bei allen Beweisen der Überabzählbarkeit der Fall ist, die auf der Konstruktion eines in der ursprünglichen Menge nicht enthaltenen Elementes beruhen - dann darf man sich nicht wundern, wenn man die Menge des Denkbaren bzw. des Existierenden nicht ausschöpft.

3. Wissenschaftliche Fortschritte in den Naturwissenschaften wurden immer wieder durch Relativierung von bisher als absolut angesehenen Begriffen erreicht. Das Abgehen vom geozentrischen und später vom heliozentrischen Weltbild ermöglichte uns ebenso ein besseres Verständnis der Welt wie später die Relativierung von Bezugssystemen durch die spezielle und weiter durch die allgemeine Relativitätstheorie. Dabei möchte ich die Begriffe "richtige" oder "falsche" Systeme der Naturbeschreibung nicht gerne verwenden, sondern es erscheint mir sinnvoller, die Qualität solcher Beschreibungen lediglich an den Anforderungen zu messen, die an sie gestellt werden; in der Naturwissenschaft also zweifellos die Forderung nach der Vorhersage beobachtbarer bzw. meßbarer Ereignisse.

   Die Aufnahme von Eindrücken der Umwelt durch den Menschen, sein Nachdenken über die Umwelt, dient letztlich dem Überleben dieser Spezies. Die Möglichkeit, in einem für den Menschen günstigen Sinne auf die Umwelt Einfluß zu nehmen, beruht vor allem auf dem Erklären von Umweltsvorgängen.

Allen solchen Erklärungen ist aber doch gemeinsam, daß ein gedankliches Modell der Umwelt aufgebaut wird, wobei ich bildhafte Vorstellungen, akustische Vorstellungen usw. einbeziehe. Tatsächlich werden Gegebenheiten der Außenwelt durch das "über sie Nachdenken" in irgendeiner Form im Inneren, u.zw. im unserem Bewußtsein zugänglichen Inneren, abgebildet. Im Rahmen dieser Abbildung haben wir Begriffe der Naturwissenschaften, Begriffe wie Raum, Zeit, Kausalität usw. und letztlich auch Begriffe wie richtig, falsch, Existenz usw. entwickelt.

Es handelt sich dabei, wenn man so will, um Reaktionen des Menschen auf Eindrücke aus der Außenwelt. Und hier liegt wohl der eigentliche Unterschied der eben geschilderten Auffassung zur Auffassung vieler Geisteswissenschaftler, die der Ansicht sind, die Begriffswelt existiere jedenfalls ohne irgendeinen Bezug auf den Menschen an sich, ohne jeden Bezug auf die Möglichkeit des Denkens, und die Menschheit müsse die Begriffswelt ebenso erforschen wie die Umwelt. Dieses Erforschen kann sich aber nur im Rahmen der Denkmöglichkeiten des Menschen abspielen und von einer "Begriffswelt" außerhalb dieses Bereiches zu sprechen, ist ebenso sinnlos wie "über jene Dinge zu sprechen, über die man grundsätzlich nicht sprechen kann".

4. Wir sind also wieder einmal bei der Problematik der Sprache. Unsere Logistiker glauben heute, aus der Tatsache, daß über eine Sprache gesprochen werden kann (Metasprache), schließen zu können, daß uns "alle möglichen Sprachen" zur Verfügung stehen und damit auch deren Begriffsinhalte. Darauf beruht auch die Denkmöglichkeit eines Kontinuums. In meiner Anordnung wird aber über die Universalschrift, die ja im Sinne der Logistiker eine Sprache darstellt, in gleicher Weise gesprochen wie über die Gesamtheit aller möglichen Lochkartenpakete, die zur Eingabe an alle möglichen Computer verwendet werden. Zeigt irgendein Computer auf Grund der Eingabe

irgendeines Lochkartenpaketes in irgendeinem Zeitpunkt in seinem Ausgabemedium, z.B. auf seinem Bildschirm, die Mitteilung:"Es handelt sich um eine reelle Zahl", dann kann ich, ohne zu wissen, ob diese Aussage auch tatsächlich richtig ist, doch alle von irgendeinem Computer jemals bei irgendeiner Lochkarteneingabe gegebenen Antworten, daß es sich um eine reelle Zahl handle, abzählbar anordnen. Was aber wesentlich ist: Mein Sprechen über diese mögliche Anordnung, wie etwa jetzt in diesem Brief an Sie, bedeutet keineswegs eine "Metasprache", da hiedurch nichts über den Begriffsinhalt, also über die Sprachobjekte, der durch die Menge aller Lochkartenpakete gegebenen Sprache ausgesagt wird. Der Begriffsinhalt kann nur durch das Zusammenwirken von Lochkartenpaket und Computer "beschrieben" werden, genauso wie alles Existierende, also alles Denkbare, nur durch das Zusammenwirken von Mitteilung und Mensch beschrieben bzw. gedacht werden kann. Dies umschreibt die Grenzen des Bereiches unseres Denkens.

Schlußbemerkung:

Der Unterschied zwischen der hier betrachteten Auffassung über Erkenntnismöglichkeit und der Auffassung, die etwa dem scholastischen Denken der heutigen Mathematik zugrunde liegt,besteht darin, daß in dieser auch die Tatsache, jede Erkenntnismöglichkeit und jede Denkmöglichkeit erfordert einen endlichen Raum und eine endliche Zeit, nicht Bedacht genommen wird. Da auch der Begriff der Existenz nur dort sinnvoll angewendet werden kann, wo es sich um ein Objekt handelt, über das in endlichem Raum und in endlicher Zeit eine endliche Mitteilung möglich ist, an das also von irgendwem irgendwann gedacht werden könnte, wird der Bereich der möglichen Wissenschaftsobjekte vielfach unzulässig ausgeweitet. Versucht man, von "etwas" außerhalb dieses Bereiches zu sprechen, so erweist sich dieses "Etwas" als in sich widerspruchsvoll.

Der Bereich des Denkmöglichen bleibt auf den Bereich des von irgendeiner Person P in irgendeinem Zeitpunkt t durch irgendeine Mitteilung M Bezeichenbaren beschränkt, also auf dem Bereich einer abzählbaren Menge. Der Bereich des Existierenden muß im Bereich des Denkbaren enthalten sein. Dies bedeutet keine unzulässige Einschränkung der existierenden Welt, sondern nur eine notwendige Abgrenzung des Begriffes Existenz.